Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
15.05.2013
Blatt 5

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 22.05.2013, 14:00h)

1. Bestimme die Lösungsgesamtheiten folgender linearer Gleichungssysteme. Bestimme jeweils auch die Lösungsgesamtheit des homogenen Systems.

   (a)

$$\begin{aligned} 2a + b - 3c &= 25 \\ 3a + 4b + c &= 30 \\ -5a - 7b + 2c &= -71 \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 3 &= 5x_3 \\ 7 + 8x_1 + x_2 &= 9x_3 \\ 21 + 3x_1 &= x_2 + 2x_3 \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} -2\alpha + \beta - \gamma &= -4 \\ 9\alpha - 7\beta - 3\gamma - 5\delta &= 3 \\ 7\alpha - 3\beta + 5\gamma + \delta &= 17 \\ -2\alpha + 5\beta + 11\gamma + 8\delta &= 20 \end{aligned}$$

   (d)

$$\begin{aligned} 4j + 3m - 10 &= 0 \\ -j - 2m - 4n - 7 &= 0 \\ 3j + 3m + 3n &= 0 \\ 2j + m - 4 &= 0 \end{aligned}$$

   (e)

$$u + 2v - 3w + 4s = 5$$

(2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

2. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$ mit $m \geq 2$. Wir betrachten das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$.

   Zeige, dass die elementare Zeilenoperation 4 aus der Vorlesung (Addition von Vielfachen zweier Zeilen und Ersetzen einer der Zeilen durch das Ergebnis) die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems nicht verändert.

(3 Punkte)

3. Über die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist bekannt, dass es sich um ein Polynom vom Grad 2 handelt, also $f(x) = ax^2 + bx + c$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   (a) Bestimme alle $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $f(-2) = 13$, $f(1) = 4$ und $f(3) = 18$ gilt.

   (b) Wie ändert sich die Lösungsmenge von (a), wenn zusätzlich $f(-1) = 7$ gelten soll? Wie ändert sie sich, wenn bekannt ist, dass $f(-1) = 6$ gilt?

   (c) Wie ändert sich die Lösungsmenge von (a), wenn die Information $f(3) = 3$ fehlt, also lediglich $f(-2) = 2$ und $f(1) = -1$ bekannt ist?

(2 + 2 + 2 Punkte)

4. (a) Berechne die innerbetrieblichen Verrechnungspreise aus Aufgabe 4 von Blatt 04 (löse das dort aufgestellte lineare Gleichungssystem).

   (b) Sind die in (a) berechneten Preise eindeutig? Berechne zum Vergleich die relativen Primärkosten pro Auster, Bier, Cocktail und Song.

(2 + 1 Punkte)

5. Es sei $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$. Zeige folgende Behauptungen oder widerlege sie mit einem Gegenbeispiel:

   (a) Falls $\operatorname{rg}(A) = n$ gilt, dann ist $\vec{x} = \vec{0}$ die einzige Lösung des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{0}$.

   (b) Es existiert $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^6$, so dass das homogene LGS genau sechs verschiedene Lösungen hat.

   (c) Es existiert $A \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^6$, so dass in der Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{y}$ sechs Vektoren enthalten sind, die linear unabhängig sind.

(1 + 1 + 1 Punkte)