Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
22.05.2013
Blatt 6

# Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 29.05.2013, 14:00h)

1. Es ist die Matrix $A$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & -3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 & -3 \\ -2 & -6 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

gegeben.

(a) Berechne die Lösungsgesamtheit des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{e}_k$ für jedes $k \in \{1, 2, 3, 4\}$ (wie in der Vorlesung bezeichnet $\vec{e}_k$ den $k$-ten Einheitsvektor).

(b) Sei $\vec{b}_k$ die Lösung von $A\vec{x} = \vec{e}_k$ aus (a) und $B$ die Matrix mit den Spaltenvektoren $\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_4$. Berechne $A \cdot B$ und $B \cdot A$.

(6 + 4 Punkte)

2. Auf der Fensterbank möchtest Du möglichst viele Pflanzen anbauen. Im Keller findest Du Samen für Erbsen, Tomaten und Geranien. Außerdem sind noch 3 Packungen Düngestäbchen (à 10 Stück) und 21 Einheiten eines natürlichen Schädlingsbekämpfungsmittels vorhanden. Um den Aufwand in Grenzen zu halten, beschließt Du maximal 63 Liter Wasser zu verbrauchen und nicht mehr als 32 Stunden Arbeit in das Projekt zu investieren.

Im Internet liest Du, dass jede Erbsenpflanze durchschnittlich 3 Liter Wasser verbraucht, genauso wie eine Geranie. Tomaten benötigen doppelt so viel. Tomaten und Geranien benötigen jeweils drei Düngestäbchen pro Pflanze. Erbsen kommen dagegen ganz ohne Dünger aus. Bei Tomaten genügen zwei Einheiten zur Schädlingsbekämpfung. Erbsen und Geranien benötigen lediglich die Hälfte. Insgesamt muss man sich drei Stunden um jede Tomatenpflanze kümmern, zwei Stunden um jede Erbse und, da die Ernte entfällt, nur eine Stunde um jede Geranie.

(a) Bestimme die benötigte Menge an Ressourcen (Wasser, Dünger, Pestizid und Arbeit), wenn Du drei Erbsen, vier Tomaten und fünf Geranien anpflanzen möchtest. Ist diese Kombination unter den obigen Einschränkungen möglich?

(b) Bestimme, mit Hilfe der Lösungsgesamtheit eines linearen Gleichungssystems, wie viele der jeweiligen Samen ausgesät werden können. Dabei sollen die zur Verfügung stehenden Ressourcen (Wasser, Dünger, Pestizid und Arbeit) komplett verbraucht werden. Kannst Du unter obigen Einschränkungen insgesamt 22 Pflanzen anbauen?

(2 + 3 Punkte)

*Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.*

3. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} -3z - 2y - x &= b_1 \\ y + 2x &= b_2 \\ 3z + 4y + 3x &= b_3 \end{aligned}$$

(a) Bestimme die Lösungsgesamtheit des homogenen Gleichungssystems.

(b) Bestimme eine allgemeine Lösungsgesamtheit, also für ein beliebiges $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)^\top \in \mathbb{R}^3$.

(2 + 2 Punkte)

4. Beantworte folgende Fragen und begründe Deine Antworten.

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\mathrm{rg}(A) = n$. Kann man ein $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ finden, so dass $\mathrm{rg}(A\vdots\vec{y}) \neq n$ gilt?

(b) Existiert eine injektive lineare Abbildung $f_A$ (mit der darstellenden Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$) und ein $\vec{y} \in \mathbb{R}^m$, so dass das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{y}$ unendlich viele Lösungen besitzt?

(c) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $\vec{b} \in R^m$. Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ Lösungen des linearen Gleichungssystems $A\vec{x} = \vec{b}$. Ist dann $\vec{w} := \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$ für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ mit $\lambda + \mu = 1$ immer eine Lösung des (inhomogenen) linearen Gleichungssystems?

(2 + 2 + 2 Punkte)