Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
29.05.2013
Blatt 7

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 05.06.2013, 14:00h)

1. Überprüfe, ob die folgenden Matrizen regulär sind und berechne gegebenenfalls die Inverse:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -3 & 1 & -9 \\ 3 & 6 & -12 \end{pmatrix} \qquad B := \begin{pmatrix} -1 & -5 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -1 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad D := \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & -6 \\ -3 & -3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

(6 Punkte)

2. Der Gutenberg-Konzern betreibt eine Papierfabrik, eine Müllverbrennungsanlage, ein Wasserwerk und eine Druckerei.

   Um Papier im Wert von 1 € herzustellen, benötigt die Papierfabrik Wasser im Wert von 0,50 €, Fernwärme von der Müllverbennung im Wert von 0,30 € und Altpapier von der Druckerei im Wert von 0,10 €. Um Fernwärme im Wert von 1 € zu erzeugen, benötigt die Müllverbrennungsanlage (Alt-)Papier von der Druckerei und der Papierfabrik, jeweils im Wert von 0,10 €. Vor der Verbrennung findet zudem ein Trocknungsprozess statt, bei der die Anlage Wärme im Wert von 0,30 € benötigt. Bei der Herstellung von Wasser im Wert von 1 € verbraucht das Wasserwerk zur Reinigung der Filter Wasser im Wert von 0,10 €, sowie Wärme im Wert von 0,10 €. Um Bücher im Wert von 1 € herzustellen, benötigt die Druckerei Papier im Wert von 0,30 € sowie Wasser und Fernwärme im Wert von je 0,20 €.

   Es besteht eine externe Nachfrage nach Papier im Wert von 219 000 €, nach Fernwärme im Wert von 383 250 €, nach Wasser im Wert von 82 125 € und nach Büchern im Wert von 109 500 €.

   (a) Stelle die Leontief- und die Technologie-Matrix auf und gib den Vektor der externen Nachfrage an.

   (b) Wenn die Inverse der Leontief-Matrix durch

   $$\frac{1}{1095}\begin{pmatrix} 1220 & 234 & 26 & 418 \\ 680 & 1746 & 194 & 592 \\ 720 & 174 & 1236 & 498 \\ 190 & 198 & 22 & 1196 \end{pmatrix}$$

   gegeben ist, wie hoch sollte die Produktion der einzelnen Teile des Gutenberg-Konzerns dann sein (in Euro), um der externen Nachfrage zu genügen?

   (c) Berechne drei Schritte des Näherungsverfahrens zur Lösung von (b) wie in der Vorlesung ($\vec{x}_0 := \vec{d}$, berechne $\vec{x}_3$).

(3 + 1 + 3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Wir betrachten die Matrix $A = (a_{ij})_{i=1..n,j=1..n}$ mit $a_{ij} \geq 0$ für alle i und j und die Matrix $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{i=1..n,j=1..n}$ mit $\tilde{A} = A^2$.

   (a) Es sei $\alpha := \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$ (Maximum der Spaltensummen von A). Zeige, dass dann
   $$0 \leq \max_{j=1\ldots n} \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} \leq \alpha^2$$
   gilt.

   (b) Die Matrix A erfülle zudem die Voraussetzungen von Satz 1.37. Zeige unter Verwendung der Teilaufgabe (a), dass dann $A^k \to 0$ für $k \to \infty$ gilt.

(2 + 2 Punkte)

4. Berechne die Determinante der folgenden Matrizen.

   (a) $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (b) $B := \begin{pmatrix} -9 & 10 & -11 & -12 \\ 0 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

   (c) $C := \begin{pmatrix} x\sin x & -x\cos x & 0 \\ x\cos x & x\sin x & 0 \\ x^3\tan x & \sqrt{x} & x \end{pmatrix}$, bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, so dass $\det(C) = 0$ ist.

   (d) $D := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2a & b & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & b^2 \\ 3 & 0 & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & a \end{pmatrix}$, bestimme alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, so dass $\det(D) = 0$ ist.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)