Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
05.06.2013
Blatt 8

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 12.06.2013, 14:00h)

1. Seien $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit

$$A_1 := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad A_2 := \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 5 & 1 \\ 0 & 5 & 28 & 8 \\ -8 & -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Berechne die Determinanten von A_1 und A_2 mithilfe des Gauß-Algorithmus.

(4 + 2 Punkte)

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$. Wir betrachten $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit den Spaltenvektoren $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n \in \mathbb{R}^n$, außerdem seien $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ und $k \in \{2, \dots, n-1\}$. Die Matrizen A_{u+v}, A_u und A_v seien wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} A_{u+v} &:= (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{u} + \vec{v}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)\,, \\ A_u &:= (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{u}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)\,, \\ A_v &:= (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_{k-1}, \vec{v}, \vec{a}_{k+1}, \dots, \vec{a}_n)\,. \end{aligned}$$

   Zeige, dass dann $\det(A_{u+v}) = \det(A_u) + \det(A_v)$ gilt. (Daraus folgt, dass die Berechnung der Determinante in jeder Spalte additiv ist.)

(4 Punkte)

3. Gegeben ist die Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, mit

$$A := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}.$$

   (a) Löse mithilfe der Cramer-Regel das lineare Gleichungssystem $A\vec{x} = \vec{e}_2$.
   (b) Ist für diese Matrix A auch das LGS $A\vec{x} = \vec{y}$ mit $\vec{y} = (23\,514, -42\pi, \sqrt{23})^\top$ lösbar?

   Hinweis: In Teilaufgabe (b) muss der Lösungsvektor nicht angegeben werden.

(4 + 1 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Es seien $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} \mathrm{e}^a & \alpha\,\mathrm{e}^a & \alpha^2\,\mathrm{e}^a \\ \mathrm{e}^b & \beta\,\mathrm{e}^b & \beta^2\,\mathrm{e}^b \\ \mathrm{e}^c & \gamma\,\mathrm{e}^c & \gamma^2\,\mathrm{e}^c \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass A genau dann regulär ist, wenn $\alpha \neq \beta$, $\alpha \neq \gamma$ und $\beta \neq \gamma$ gilt, wenn also α, β und γ drei verschiedene Zahlen sind.

(4 Punkte)

5. Invertiere die folgenden Matrizen mithilfe der Determinante (entsprechend Satz 1.47 aus dem Vorlesungsbegleiter).

   (a) $M := \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}$ mit $a, b, c \in \mathbb{R}$, so dass $\det(M) \neq 0$

   (b) $B := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(3 + 3 Punkte)