Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
12.06.2013
Blatt 9

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 19.06.2013, 14:00h)

1. Betrachte die Vektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_4 \in \mathbb{R}^3$ mit

$$\vec{v}_1 := \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_2 := \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 14 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_3 := \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_4 := \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Bestimme alle Kombinationen dieser Vektoren, die eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. Verwende dazu Determinanten.

   (b) Welche der in Aufgabenteil (a) gefundenen Basen erzeugt das Parallelepiped mit dem größten Volumen und wie groß ist es?

(4 + 1 Punkte)

2. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix.

   (a) Zeige, dass alle Eigenwerte von A durch die Diagonalelemente a_{kk}, $k = 1, \dots, n$, gegeben sind.

   (b) Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, wenn 0 kein Eigenwert von A ist.

   (c) Bestimme Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit

$$M := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(2 + 2 + 2 Punkte)

3. (a) Untersuche die folgende Matrix auf Definitheit:

$$A := \begin{pmatrix} 8 & 7 & 3 \\ 7 & 10 & -2 \\ 3 & -2 & 15 \end{pmatrix}.$$

   (b) Bestimme alle $\alpha \in \mathbb{R}$, für die die Matrix B positiv definit, negativ definit und indefinit ist. B ist durch

$$B := \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

   gegeben.

   Hinweis: Verwende für Semi- und Indefinitheit die Definition (nicht das Hauptminorenkriterium).

(2 + 5 Punkte)

4. Bestimme und klassifiziere alle kritischen Punkte der folgenden Funktionen:

   (a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y, z) = x^2 + y^2 \, \mathrm{e}^z + z$.

   (b) $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ mit $g(a, b, c, d) = ad(a + d) + \frac{1}{3}a^3 - 4a - \frac{1}{2}b^2 + b - c^2 + 2c + 42$.

(2 + 5 Punkte)