Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
19.06.2013
Blatt 10

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 26.06.2013, 14:00h)

1. Betrachte die Matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$M := \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -4-a & -4-2a \\ 0 & -4-2a & 2+2a \end{pmatrix}$$

und $a \in \mathbb{R}$. Bestimme alle $a \in \mathbb{R}$, für die M positiv definit, positiv semidefinit, indefinit, negativ semidefinit und negativ definit ist.

(4 Punkte)

2. Eine Vermögensverwaltung hat ein Portfolio mit n verschiedenen Anlagemöglichkeiten (etwa Aktien, Anleihen, Genussrechte, Tagesgeld, etc.). Der Anteil Deines Vermögens, dass Du in Anlage i ($i \in \{1, \ldots, n\}$) investiert hast, sei $x_i \geq 0$ und damit $\sum_{i=1}^n x_i = 1$. Jede Anlage trägt ein bestimmtes Verlustrisiko $\alpha_i \geq 0$. Je größer das Risiko, desto größer ist α und umgekehrt. Insgesamt wird das Risiko des Portfolios durch die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2$ berechnet. Du möchtest Dein Geld mit minimalem Risiko anlegen.

   (a) Formuliere eine passende Optimierungsaufgabe mit Nebenbedingungen und stelle die Lagrange-Funktion auf.

   (b) Ermittle die für ein Minimum notwendigen Bedingungen und überprüfe, ob das dabei auftretende Gleichungssystem in der Form $A\vec{x} = \vec{b}$ mit $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_n, \lambda)$ (hier ist λ der Lagrangeparameter) geschrieben werden kann.

   (c) Welche Strategie sollte man verfolgen, wenn es ein $i \in \{1, \ldots, n\}$ gibt, mit $\alpha_i = 0$?

   (d) Berechne eine risikominimale Anlagestrategie für den Fall $n = 4$ und

   $$\alpha_1 = 3,\ \alpha_2 = 2,\ \alpha_3 = 1 \text{ und } \alpha_4 = 1{,}5.$$

   Verwende die Einsetzmethode und überprüfe, ob die hinreichende Bedingung für ein Minimum erfüllt ist.

(1 + 1 + 1 + 4 Punkte)

3. Zeige, dass jede positiv definite Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ auch invertierbar ist, dass die Umkehrung aber nicht gilt (finde eine Matrix, die invertierbar ist, aber nicht positiv definit).

(4 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Bei der Planung eines Großprojekts soll eine Kosten-Nutzen-Analyse in Abhängigkeit von drei Variablen $x, y, z \in (0, \infty)$ durchgeführt werden. Der Nutzen wird durch die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, die Kosten durch die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ beschrieben, wobei

$$f(x, y, z) := x^3 y^2 z$$
$$g(x, y, z) := x + y + z.$$

Der Nutzen (bzw. die Funktion f) soll maximiert werden, ohne dass der Kostenrahmen gesprengt wird. Es kommen nur $(x, y, z) \in (0, \infty)^3$ mit $g(x, y, z) \leq 6$ in Frage.

Existiert ein im obigen Sinne optimales Tripel (x, y, z)? Bestimme es gegebenenfalls mit der Lagrange-Methode.

(4 Punkte)

5. (a) Gegeben ist die Funktion $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = (x-1)^2 - 1$. Berechne S_{P_i} wie in der Vorlesung ($i = 1, 2, 3$) und nähere damit die Fläche zwischen der Kurve und der x-Achse an. Für die Partitionen P_i soll dabei

$$\|P_1\| \leq 1,\ \|P_2\| \leq \tfrac{3}{4} \text{ und } \|P_3\| \leq \tfrac{1}{2}$$

gelten. Es sollen drei verschiedene Partitionen verwendet werden.

(b) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$. Die Partitionen P_n von $[a, b]$ seien äquidistant (also $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n}$ für $i = 0, \ldots, n$) und $z_i := x_{i-1}$ (linker Intervallendpunkt). Zeige, dass dann

$$S_{P_n} = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)(x_i - x_{i-1}) \to \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$$

für $n \to \infty$ gilt.

(3 + 3 Punkte)