

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(Zu bearbeiten bis Mittwoch, den 03.07.2013, 14:00h)

1. Berechne den Flächeninhalt der Fläche, die zwischen der x -Achse und dem Graph der Funktion $f(x) := \sin x$ für $x \in [0, 2\pi]$ eingeschlossen ist.

(1 Punkte)

2. Es sei $a < b$ und $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

- (a) Die Funktion f sei stetig und es gelte $\int_a^b f(x) dx = 0$. Zeige, dass f dann im Intervall $[a, b]$ eine Nullstelle hat.
- (b) Zeige, dass die Umkehrung von (a) nicht gilt. Finde also eine stetige Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ mit Nullstelle in $[a, b]$, aber $\int_a^b f(x) dx \neq 0$.
- (c) Sei jetzt $a = 0$, $b = 2$ und f durch

$$f(x) := \begin{cases} 1 & \text{falls } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{falls } x \in (1, 2] \end{cases}$$

gegeben. Zeige, dass dann kein $z \in [a, b]$ mit $\int_a^b f(x) dx = f(z)(b - a)$ existiert.

- (d) Ist Teilaufgabe (c) ein Widerspruch zum Mittelwertsatz der Integralrechnung? Begründe Deine Antwort.

(2 + 2 + 2 + 1 Punkte)

3. In einem Unternehmen sind die Grenzkosten $K'(x)$ und der Grenzerlös $E'(x)$ durch

$$K'(x) = 4x^2 - 22x + 80 \text{ und } E'(x) = -20x + 190$$

gegeben. Bei der Herstellung von 6 Mengeneinheiten entstehen Kosten von 400 Werteeinheiten.

- (a) Bestimme die Erlös- und die Kostenfunktion.
- (b) Bestimme die Preis-Absatz-Funktion.
- (c) Berechne den Preis im Gewinnmaximum.

(2 + 1 + 1 Punkte)

4. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0, 1)$. Die Funktion $f : [0, n + 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ist durch

$$f(x) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \text{ falls } x \in [k, k + 1)$$

gegeben, wobei $k \in \{0, \dots, n\}$. Berechne $\int_0^{n+1} f(x) dx$.

(2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Der Süßstoffhersteller Nordsüß hat über eine Anleihe 1 000 000 € Kapital eingesammelt um einen auf Stevia basierenden Süßstoff auf den Markt zu bringen. Bei der Produktion entstehen Fixkosten in Höhe von 100 000 €. Die Grenzkosten (je produzierter Mengeneinheit x) sind durch $K'(x) = 200x + 13000$ gegeben.

- (a) Bestimme die maximale Anzahl an Mengeneinheiten des Süßstoffs, der mit dem zur Verfügung stehenden Kapital produziert werden kann.
- (b) Die Nachfragefunktion für den Süßstoff ist durch $p^D(q) := -100q + 25\,000$ gegeben. Die Firma Nordsüß kann den Süßstoff in beliebig kleinen Portionen abgeben und bekommt von jedem Nachfrager den maximalen Betrag, den dieser zu zahlen bereit ist. Welchen Betrag kann Nordsüß durch den Verkauf der kompletten Süßstoffproduktion einnehmen?

(2 + 2 Punkte)

6. Berechne jeweils $\int_a^b f(x) dx$:

(a) $a = 0, b = 1, f(x) = \frac{x^3}{x^4 - 3}$

(b) $a = 0, b = \frac{\pi}{4}, f(x) = \left(\frac{1}{\cos x}\right)^2$

(c) $a = e, b = s, f(x) = \frac{1}{x \ln x}$

(d) $a = -1, b = 1, f(x) = \frac{5x^6 + 4x^5 - 20x^4 - 14x^3 + 42x^2 - 8x - 168}{(x+2)(x-2)}$

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)