Dr. K. Stadtmüller
M. Harder

Sommer 2013
10.07.2013
Blatt 13

Übungen zu Mathematische Grundlagen der Ökonomie II

(keine Abgabe, Besprechung der Aufgaben 15.07. – 17.07.)

1. Bestimme alle $(v, w, x, y, z)^\top \in \mathbb{R}^5$, die das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2v + w - 3x + y + 2z &= -2 \\ 3v + 4w + 2x + 2y + z &= -4 \\ 5v + w - x - y + 3z &= 6 \end{aligned}$$

lösen. Verwende den Gauß-Algorithmus.

2. (a) Berechne die Determinante der folgenden Matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 & 8 \\ 5 & -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 4 & -3 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(b) Ein Eigenwert der folgenden Matrix ist 2:

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 14 & -4 \\ 14 & 10 & 10 \\ -4 & 10 & 19 \end{pmatrix}$$

Bestimme die anderen Eigenwerte und zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor. Untersuche die Matrix auf Definitheit.

(c) Untersuche, ob die folgenden Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3. Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ mit $A = -A^\top$. Zeige, dass dann n gerade ist oder $\mathrm{rg}(A) < n$ gilt.

4. Gegeben sind folgende Daten zur innerbetrieblichen Leistungsverrechnung:

Kosten-stelle	Leistungsabgabe an die Kostenstelle				gesamte Leistungsabgabe	primäre Kosten
	A	B	C	D		
A	–	50	50	50	200	400
B	–	–	100	100	250	100
C	150	–	–	–	350	250
D	100	50	–	50	250	150

Berechne die innerbetrieblichen Verrechnungspreise, die den Kostenstellen A, B, C, D für die von den anderen Kostenstellen empfangenen Leistungen in Rechnung gestellt werden müssen.

5. Zeige oder widerlege:

   (a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Dann ist die Lösungsmenge des LGS $A\vec{x} = \vec{y}$ ein UVR des $\mathbb{R}^m$.
   (b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt stets $\operatorname{spur}(AB) = \operatorname{spur}(BA)$, wobei $\operatorname{spur}(A) := \sum_{k=1}^{n} (A)_{kk}$.
   (c) Seien $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $a < b$ und $g(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ sowie $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \neq 0$. Dann gilt stets $\int_a^b \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x}$.
   (d) Seien $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^5$ linear abhängig. Dann sind auch $\vec{x}$ und $\vec{z}$ linear abhängig.

6. Es sei $M \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$M := \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = c\}.$$

   Zeige, dass M genau dann ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$ ist, wenn $c = 0$ gilt.

7. Betrachte $A, B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechne jeweils die inverse Matrix A^{-1}, B^{-1}, falls diese existieren. Begründe andernfalls, weshalb die Matrix nicht invertierbar ist.
   (b) Die lineare Abbildung $f_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ist durch $f_B(\vec{x}) := B\vec{x}$ gegeben. Bestimme $\operatorname{kern}(f_B)$ und $\operatorname{rang}(f_B)$.

8. (a) Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = -xy^2 + 11x$$

   auf lokale Extremwerte unter der Nebenbedingung $x + 2y = 8$ mit Hilfe der Lagrange-Methode. Überprüfe das Ergebnis mit der Einsetzmethode.
   (b) Bestimme alle kritischen Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y, z) = 6x - 5x^2 + 4xz - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi y} \sin u \,\mathrm{d}u - z^2$$

   und klassifiziere diese.

9. Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_0^{\pi} \sin(x)\,\mathrm{e}^{2x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{1}{\tan(x)}\,\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \frac{2x}{x^2 - x - 2}\,\mathrm{d}x, \quad \int 3(x^3 + x)\sin(x^2 + 1)\,\mathrm{d}x.$$

10. Bestimme den Wert der folgenden Integrale, sofern er existiert. Begründe andernfalls, wieso er nicht existiert.

$$\int_0^1 x \ln x \,\mathrm{d}x, \quad \int_1^{\infty} x \ln x \,\mathrm{d}x, \quad \int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}} \lfloor x \rfloor \,\mathrm{d}x, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{x^2 - 2x + 5}\,\mathrm{d}x$$

   Hinweis: Es gilt $\lfloor x \rfloor = \max\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ (sog. „Gaußklammer“ oder „Abrundungsfunktion“).

11. Berechne jeweils $\iint_M f(x, y) d(x, y)$.

   (a) $f(x, y) = \sin(x)\,\mathrm{e}^y, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 2\pi, 0 \leq y \leq 1\}$
   (b) $f(x, y) = y^2\,\mathrm{e}^{\frac{2x}{y}}, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 2, x \leq y \leq 2x\}$
   (c) $f(x, y) = y + 1, M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$