

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte und 12 Zusatzpunkte

Abgabe: Freitag, 9. Januar 2015, vor den Übungen

1. Es sei $G = ((\mathbb{Z}/242\mathbb{Z})^*, \cdot)$.
 - (a) Bestimme die Anzahl der Elemente von G .
 - (b) Gib G explizit an.
 - (c) Bestimme die Ordnung der Elemente 3 und 5.
 - (d) Berechne $7^{28} \bmod 242$ und $7^{97} \bmod 242$.
 - (e) Zeige, dass 7 die "kleinste" Primitivwurzel modulo 242 ist und dass somit G zyklisch ist.
 - (f) Wieviele Primitivwurzeln besitzt G ?
 - (g) Gib für alle Primitivwurzeln r von G eine Darstellung $r = 7^k$ an.
 - (h) Existieren Elemente $g \in G$ mit $\text{ord}_{242} g = 22$?
 - (i) Wieviele Untergruppen besitzt G ?
 - (j) Zeige, dass 3 in der Untergruppe U_{10} der Ordnung 10 enthalten ist, diese aber nicht erzeugt.
 - (k) Gib alle Elemente von U_{10} an.
 - (l) Welches ist die "größte" Primitivwurzel modulo 242?
 - (m) Gib einen Isomorphismus $\Phi: (\mathbb{Z}/110\mathbb{Z}, +) \rightarrow ((\mathbb{Z}/242\mathbb{Z})^*, \cdot)$ an und ermittle $\Phi(77 \bmod 110)$.
 - (n) Welche Elemente enthält $\Phi^{-1}(U_{10})$?
 - (o) Zeige, dass U_{10} neben den trivialen Untergruppen noch zwei nichttriviale besitzt.
 - (p) Zeige, dass $U^{(1)} = \{1, 241\}$ eine solche darstellt und bestimme die zweite, die wir $U^{(2)}$ nennen.
 - (q) Beweise, dass die Rechts- und die Linksnebenklassen von U_{10} identisch sind.
 - (r) Gib die Nebenklassen G/U_{10} von U_{10} explizit an.
 - (s) Diese Nebenklassen bilden bzgl. der Verknüpfung

$$\circ: G/U_{10} \times G/U_{10} \rightarrow G/U_{10} \quad \text{mit} \quad (gU_{10}) \circ (hU_{10}) = (g \cdot h)U_{10}$$
 mit $g, h \in G$ wieder eine abelsche Gruppe, was nicht gezeigt werden braucht.
 Es sei N_{25} die Nebenklasse, die das Element 25 enthält und N_{35} diejenige, die die 35 enthält.
 Bestimme $N := N_{25} \circ N_{35}$.
 - (t) Ermittle $\Phi^{-1}(N)$.
 - (u) Welches ist das neutrale Element der Gruppe $(G/U_{10}, \circ)$?
 - (v) Berechne das zu N inverse Element.
 - (w) Bestimme die Anzahl der Untergruppen von $(G/U_{10}, \circ)$.
 - (x) Gib diese Untergruppen explizit an.
 - (y) Bestimme die Nebenklassen $U_{10}/U^{(2)}$ sowie $\Phi^{-1}(U_{10}/U^{(2)})$.
 - (z) Zu welcher Gruppe ist $(U_{10}/U^{(2)}, \circ)$ isomorph? Gib einen Isomorphismus an. (36 Punkte)

**Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten
und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2015!**