

## Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte und 12 Zusatzpunkte

Abgabe: Freitag, 9. Januar 2015, vor den Übungen

1. Es sei  $G = ((\mathbb{Z}/242\mathbb{Z})^*, \cdot)$ .
- Bestimme die Anzahl der Elemente von  $G$ .
  - Gib  $G$  explizit an.
  - Bestimme die Ordnung der Elemente 3 und 5.
  - Berechne  $7^{28} \bmod 242$  und  $7^{97} \bmod 242$ .
  - Zeige, dass 7 die "kleinste" Primitivwurzel modulo 242 ist und dass somit  $G$  zyklisch ist.
  - Wieviele Primitivwurzeln besitzt  $G$ ?
  - Gib für alle Primitivwurzeln  $r$  von  $G$  eine Darstellung  $r = 7^k$  an.
  - Existieren Elemente  $g \in G$  mit  $\text{ord}_{242} g = 22$ ?
  - Wieviele Untergruppen besitzt  $G$ ?
  - Zeige, dass 3 in der Untergruppe  $U_{10}$  der Ordnung 10 enthalten ist, diese aber nicht erzeugt.
  - Gib alle Elemente von  $U_{10}$  an.
  - Welches ist die "größte" Primitivwurzel modulo 242?
  - Gib einen Isomorphismus  $\Phi: (\mathbb{Z}/110\mathbb{Z}, +) \rightarrow ((\mathbb{Z}/242\mathbb{Z})^*, \cdot)$  an und ermittle  $\Phi(77 \bmod 110)$ .
  - Welche Elemente enthält  $\Phi^{-1}(U_{10})$ ?
  - Zeige, dass  $U_{10}$  neben den trivialen Untergruppen noch zwei nichttriviale besitzt.
  - Zeige, dass  $U^{(1)} = \{1, 241\}$  eine solche darstellt und bestimme die zweite, die wir  $U^{(2)}$  nennen.
  - Beweise, dass die Rechts- und die Linksnebenklassen von  $U_{10}$  identisch sind.
  - Gib die Nebenklassen  $G/U_{10}$  von  $U_{10}$  explizit an.
  - Diese Nebenklassen bilden bzgl. der Verknüpfung
 
$$\circ: G/U_{10} \times G/U_{10} \rightarrow G/U_{10} \quad \text{mit} \quad (gU_{10}) \circ (hU_{10}) = (g \cdot h)U_{10}$$
 mit  $g, h \in G$  wieder eine abelsche Gruppe, was nicht gezeigt werden braucht.  
 Es sei  $N_{25}$  die Nebenklasse, die das Element 25 enthält und  $N_{35}$  diejenige, die die 35 enthält.  
 Bestimme  $N := N_{25} \circ N_{35}$ .
  - Ermittle  $\Phi^{-1}(N)$ .
  - Welches ist das neutrale Element der Gruppe  $(G/U_{10}, \circ)$ ?
  - Berechne das zu  $N$  inverse Element.
  - Bestimme die Anzahl der Untergruppen von  $(G/U_{10}, \circ)$ .
  - Gib diese Untergruppen explizit an.
  - Bestimme die Nebenklassen  $U_{10}/U^{(2)}$  sowie  $\Phi^{-1}(U_{10}/U^{(2)})$ .
  - Zu welcher Gruppe ist  $(U_{10}/U^{(2)}, \circ)$  isomorph? Gib einen Isomorphismus an. (36 Punkte)

**Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten  
und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2015!**