Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Freitag, 24. Oktober 2014, vor den Übungen

1. Ein effizienterer Weg zur Bestimmung von Primzahlen als die Vorgehensweise von Aufgabe 2 auf Übungsblatt 1 ist der folgende Algorithmus:

   Es sei $N \in \mathbb{N}$, und es liege eine Liste aller natürlichen Zahlen von 1 bis N vor.

   - Streiche die 1.
   - Markiere die 2 als Primzahl und streiche alle Vielfachen von 2.
   - Betrachte nun die kleinste nicht gestrichene und nicht markierte Zahl $p > 1$ auf der Liste.
   - Markiere diese Zahl als Primzahl und streiche alle Vielfachen von p.
   - Wiederhole die beiden letzten Schritte, bis alle Zahlen in der Liste entweder gestrichen oder als Primzahl markiert sind.

   (a) Es sei $N = 110$. Führe obiges Verfahren durch und bestimme alle Primzahlen kleiner als 110.

   (b) Führe nun ausgehend von diesem Schema dasselbe Verfahren "rückwärts" durch und lies daraus alle Darstellungen der Zahl 110 als Summe von zwei Primzahlen ab.

   (c) Stelle die geraden Zahlen k mit $12 \leq k \leq 24$ als Summe von zwei Primzahlen dar.
   Gib dabei jeweils alle Möglichkeiten an.

   (d) Zwei Primzahlen werden Primzahlzwillinge genannt, wenn für eine Primzahl p die Zahl $p + 2$ ebenfalls wieder eine Primzahl ist.
   Modifiziere dieses Verfahren derart, um eine Liste aller Primzahlzwillinge zu erhalten.

   (e) Bestimme somit alle Primzahlzwillinge zwischen 1 und 110. (13 Punkte)

2. Nun lässt sich der Algorithmus der Probedivision auf Übungsblatt 1 aber nutzen, um nicht nur zu erkennen, ob eine Zahl prim oder zusammengesetzt ist, sondern auch um ihre vollständige kanonische Primfaktorzerlegung zu bestimmen. Der Algorithmus geht folgendermaßen:

   - Beginne mit $p = 2$ an und arbeite die Liste der Primzahlen ab. Für jede Primzahl p testet man mittels Probedivision, ob $p|n$.
   - Falls $p|n$, bestimmt man die höchste Potenz p^k mit $p^k|n$.
   - Ersetze nun n durch $\frac{n}{p^k}$ und betrachte die nächste Primzahl.
   - Sobald $p^2 > n$ ist, ist der Algorithmus zu Ende, und die Primfaktorzerlegung liegt vor.

   Bestimme damit die Primfaktorzerlegung von

   (a) $n = 523$

   (b) $n = 9801$

   (c) $n = 11663$. (7 Punkte)

3. Es seien $m = 1280$ und $n = 2320$ gegeben.

   (a) Bestimme die kanonische Primfaktorzerlegung von m und n.

   (b) Ermittle daraus den größten gemeinsamen Teiler und das kleinste gemeinsame Vielfache der Zahlen m und n. (4 Punkte)