

Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 7. November 2014, vor den Übungen

1. (a) Es seien $a, b \in \mathbb{Z}$ und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
Finde eine Faktorisierung von $a^n - b^n$ mit dem Faktor $a - b$.
 - (b) Unter der Teilersumme σ einer natürlichen Zahl n versteht man die Summe aller ihrer Teiler.
 - i. Was ist $\sigma(p)$ mit einer Primzahl p ?
 - ii. Zeige: $\sigma(p^\alpha) = \frac{p^{\alpha+1} - 1}{p - 1}$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$.
 - iii. Zeige: $\sigma(p^\alpha \cdot q^\beta) = \sigma(p^\alpha) \cdot \sigma(q^\beta)$ mit $p \neq q \in \mathbb{P}$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$.
 - (c) Eine Primzahl M_n von der Form $M_n = 2^n - 1$ mit $n \in \mathbb{N}$ wird Mersenne- Primzahl genannt.
Zeige, dass bereits n eine Primzahl sein muss, wenn M_n eine Primzahl ist.
 - (d) Eine Zahl $m \in \mathbb{N}$ heißt vollkommen, wenn m die Summe seiner echten Teiler ist, d.h. ohne die Zahl m selbst. Zeige, dass keine Primzahl und keine Primzahlpotenz vollkommen ist.
 - (e) Zeige, dass $n = p^\alpha \cdot q^\beta$ mit Primzahlen $p \neq q$ mit $p, q > 2$ und $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$ nicht vollkommen ist.
 - (f) Ist diese Aussage immer noch richtig, wenn die Bedingung $p, q > 2$ wegelassen wird?
 - (g) Zeige, dass m vollkommen ist, wenn m von der Form $m = 2^{p-1} \cdot M_p$ ist. (16 Punkte)
2. Die IBAN (International Bank Account Number) ist eine internationale, standardisierte Notation für Bankkontonummern. Sie besteht aus maximal 34 Zeichen und setzt sich aus einem zweistelligen Ländercode, einer zweistelligen Prüfziffer und einer max. 30stelligen Kontoidentifikation zusammen. In Deutschland besteht die IBAN aus 22 Zeichen, wobei die 18stellige Kontoidentifikation (BBAN) aus der achtstelligen Bankleitzahl (BLZ) und der bis zu zehnstelligen Kontonummer, die ggfs. mit führenden Nullen bestückt wird, in dieser Reihenfolge gereiht wird. Der Ländercode lautet "DE".
- (a) Um die Prüfziffer zu berechnen, wandelt man nun den alphanumerischen Ländercode gemäß dem Schema "A = 10", "B = 11", ..., "Z = 35" in einen rein numerischen Code um und ergänzt ihn durch zwei angehängte Nullen und setzt dies ans Ende der BBAN, womit sich nun die 24stellige Prüfsumme P ergibt. Dann folgt für die Prüfziffer $PZ = 98 - (P \bmod 97)$, wobei, falls die Prüfziffer einstellig ist, diese durch eine führende Null ergänzt wird.
Ein Teilnehmer des internationalen Bankverkehrs möchte von seinem Konto 344 375 005 bei der Volksbank Bad Saulgau eine Überweisung auf das Konto 40 747 000 bei der Raiffeisenbank Aulendorf tätigen. Bestimme die beiden notwendigen IBAN.
 - (b) Die Prüfung der IBAN erfolgt durch Betrachtung einer Zahl N , die entsteht, indem ihre ersten vier Stellen hinter die BBAN ans Ende verschoben und die Buchstaben wieder durch die korrespondierenden Ziffern ersetzt werden. Die IBAN ist gültig, wenn $N \equiv 1 \pmod{97}$ gilt.
Ein weiterer Teilnehmer hat Probleme, eine Überweisung auszuführen. Er möchte einen Betrag vom Konto DE35 6505 0110 1086 1516 50 auf das Konto DE11 6509 2200 0004 9980 06 auszuführen. Wo liegt der Fehler? (8 Punkte)