Übungen zur Angewandten Diskreten Mathematik

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Freitag, 12. Dezember 2014, vor den Übungen

1. (a) Es sei $(G, \circ)$ eine Gruppe und $U \subseteq G$.
   Zeige, dass $(U, \circ)$ genau dann eine Untergruppe von $(G, \circ)$ ist, wenn die folgenden Eigenschaften erfüllt sind:
   (U1) Die Menge U ist nichtleer, d.h. $U \neq \emptyset$.
   (U2) Für alle $a, b \in U$ gilt $a \circ b^{-1} \in U$.

   (b) Entscheide, ob
   $$M := \{x \in \mathbb{Q} \colon \exists n \in \mathbb{Z} \text{ mit } x = 2^n\}$$
   mit der gewöhnlichen Multiplikation eine Untergruppe von $(\mathbb{Q} \backslash \{0\}, \cdot)$ ist. (7 Punkte)

2. Wir betrachten $G = ((\mathbb{Z}/18\mathbb{Z})^*, \cdot)$.

   (a) Gib explizit die Elemente von G an.

   (b) Zeige, dass G zyklisch ist.

   (c) Bestimme alle Untergruppen von G.

   (d) Es seien die Abbildungen
   $$\begin{aligned} \Phi_1 &: (\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +) \to G,\ k \bmod 5 \to 11^k \bmod 18, \\ \Phi_2 &: (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +) \to G,\ k \bmod 6 \to 7^k \bmod 18 \quad \text{und} \\ \Phi_3 &: (\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +) \to G,\ k \bmod 6 \to 11^k \bmod 18 \end{aligned}$$
   gegeben.
   Stellen Φ_1, Φ_2 bzw. Φ_3 einen Isomorphismus zwischen $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, +)$ bzw. $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}, +)$ und G dar? (8 Punkte)

3. Es sei $V_4 = \{id, (12)(34), (13)(24), (14)(23)\}$, wobei die vier Elemente von V_4 Permutationen in der Zykeldarstellung seien.

   (a) Zeige, dass $(V_4, \circ)$, wobei $\circ$ für die Komposition von Permutationen stehe, eine Gruppe bildet.

   (b) Finde eine Menge von Matrizen vom Typ $(2, 2)$, die bezüglich der Matrixmultiplikation eine zu $(V_4, \circ)$ isomorphe Gruppe bildet.

   Hinweis:
   Betrachte $Q = \{(1, 1), (-1, 1), (-1, -1), (1, -1)\}$, die Menge der Ecken eines Quadrats.
   Was ist die Menge der bijektiven linearen Abbildungen des $\mathbb{R}^2$, die Q auf sich selbst abbilden? (9 Punkte)