Prof. Dr. W. Kratz
M. Harder

Winter 2014/2015
20.10.2014
Blatt 01

Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 27.10.2014, 14:00h vor H3)

1. Untersuche die folgenden Funktionenfolgen und -reihe auf punktweise und gleichmäßige Konvergenz auf dem jeweils angegebenen Intervall I:

   (a) $f_n(x) := x^n$, $I = \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

   (b) $f_n(x) := x^n$, $I = [0, 1]$.

   (c) $f_n(x) := \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$, $I = \mathbb{R}$.

   (d) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(\sqrt{k}x\right)}{1+k^2}$, $I = \mathbb{R}$.

   (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

2. Untersuche die Grenzfunktionen aus Aufgabe 1, falls existent, jeweils auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit.

   (1 + 1 + 1 + 1 Punkte)

3. Gegeben seien $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, ein Intervall $I \subset \mathbb{R}$ sowie stetige Funktionen $f, g\colon I \to \mathbb{R}$.

   (a) **Bernoullische Differentialgleichung**: Zeige, dass die Differentialgleichung

   $$y' = f(x)y + g(x)y^{\alpha}$$

   durch den Ansatz $y = z^{\frac{1}{1-\alpha}}$ in die lineare Differentialgleichung

   $$z' = (1-\alpha)f(x)z + (1-\alpha)g(x)$$

   übergeht.

   (b) **Homogene Differentialgleichung**: Zeige, dass jede Funktion y der Gestalt

   $$y(x) = xv(x) \text{ mit } v' = \frac{f(v) - v}{x}$$

   oder der Gestalt

   $$y(x) = cx \text{ mit } f(c) = c$$

   die Differentialgleichung

   $$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x \neq 0$$

   löst.

   (2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Bestimme jeweils eine Lösung der folgenden Anfangswertprobleme mit maximalem Lösungsintervall:

   (a) $y' + 3x^2 y = 3x^2$, $y(1) = 1$.

   (b) $y' = \big(1 + y^2\big)(1 + x)$, $y(0) = 0$.

   (c) $y' + 2y = y^2\,\mathrm{e}^x$, $y(0) = 2$.

   (d) $xy' = y \log\big(\frac{y}{x}\big)$, $y(-1) = -1$.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.