Prof. Dr. W. Kratz
M. Harder

Winter 2014/2015
27.10.2014
Blatt 02

# Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 03.11.2014, 14:00h vor H3)

1. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$f_n(x) := \begin{cases} \frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} & \text{für } x \in [0, n], \\ 0 & \text{für } x > n. \end{cases}$$

   (a) Zeige, dass $f_n$ auf $[0, \infty)$ gleichmäßig konvergiert.
   (b) Gilt $\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x$?

(2 + 2 Punkte)

2. Es sei eine reelle Doppelfolge $(a_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ gegeben und es gelte

   - $\lim_{m\to\infty} a_{mn} =: \beta_n$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$,
   - $\lim_{n\to\infty} \beta_n$ existiert, und
   - $a_{mn} \to \alpha_m$ für $n \to \infty$, gleichmäßig in $m \in \mathbb{N}$, das heißt

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } |a_{mn} - \alpha_m| < \varepsilon\ \forall n \geq N \text{ und } \forall m \in \mathbb{N}.$$

   Zeige, dasss $\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn}$ existiert und dass

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{mn} = \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{mn}$$

   gilt.

(4 Punkte)

3. Bestimme jeweils die allgemeine Lösung der Differentialgleichungen:

   (a) $y' = 2xy + x$. Skizziere außerdem die Lösungsschar.
   (b) $y' = 1 + y^2$. Skizziere außerdem die Lösungsschar.
   (c) $y' = 2 - 2y + y^2$.

(2 + 2 + 2 Punkte)

4. Löse die folgenden Anfangs- und Randwertprobleme sowie Integralgleichungen. Entscheide, ob die Lösung eindeutig ist und gib ein möglichst großes Lösungsintervall an:

   (a) $2 \sin x \cos x + y + xy' = 0$ mit $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.
   (b) $x'' + 2x' + 2x = 0$ mit $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$.
   (c) $x'' + 2x' + 2x = 0$ mit $x(0) = 1$, $x(2\pi) = \mathrm{e}^{-2\pi}$.
   (d) $y(x) = \int_0^x \left(1 + y^2(t)\right)\,\mathrm{d}t$.

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=58157