Prof. Dr. W. Kratz
M. Harder

Winter 2014/2015
03.11.2014
Blatt 03

Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 10.11.2014, 14:00h vor H3)

1. Bestimme jeweils die Lösungsgesamtheit folgender Differentialgleichungen:

   (a) $y'' + y' - 2y = 0$.
   (b) $y'' - 8y' + 16y = 0$.
   (c) $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^x$.
   (d) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$.

   Verwende geeignete Ansätze für (c) und (d).

   (2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

2. Löse die folgenden Anfangswertprobleme und bestimme jeweils das maximale Lösungsintervall:

   (a) $y' \cos y = \sqrt[3]{\sin^2 y}$, $y(0) = 0$.
   (b) $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   (c) $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 1$.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

3. Gegeben sei das folgende Randwertproblem mit einer Konstanten $a \in \mathbb{R}$:

   $$y'' + ay = 0, \quad y(0) = 0 \text{ und } y(1) = 1.$$

   (a) Für welche Werte von a besitzt das Randwertproblem keine Lösung?
   (b) Berechne im Falle der Lösbarkeit die Lösung des Randwertproblems.

   (2 + 2 Punkte)

4. (*Gronwallsche Ungleichung*) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, außerdem $f, g \in C[a,b]$, $y \in C^1[a,b]$, und es gelte $y'(x) \leq f(x)y(x) + g(x)$ für alle $x \in [a,b]$.
   Zeige: Mit $F(x) := \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ gilt

   $$y(x) \leq \mathrm{e}^{F(x)} \left(y(a)\,\mathrm{e}^{-F(a)} + \int_a^x g(t)\,\mathrm{e}^{-F(t)}\,\mathrm{d}t \right)$$

   für alle $x \in [a,b]$.

   (4 Punkte)

5. Berechne für das Anfangswertproblem

   $$y' = (y + x)^2, \quad y(0) = 1$$

   die Iterierten y_0, y_1 und y_2 der Picard-Iteration.

   (3 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=58157