

## Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Freitag, den 21.11.2014, 10:00h vor H14)

1. Es seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Zeige:

- (a)  $AB$  und  $BA$  sind ähnlich, falls  $A$  oder  $B$  invertierbar ist.
- (b) Für alle  $x \in \mathbb{R}^n$  gilt  $P_{AB}(x) = P_{BA}(x)$ .
- (c) Es gilt  $\text{Spur}(AB) = \text{Spur}(BA)$ .

(1 + 2 + 1 Punkte)

2. Es sei  $X(t)$  eine Fundamentalmatrix von  $\dot{x} = A(t)x$ . Zeige, dass dann  $Y(t) := (X^{-1}(t))^{\top}$  eine Fundamentalmatrix des adjungierten Systems  $\dot{x} = -A^{\top}(t)x$  ist.

(2 Punkte)

3. Betrachte das Lineare System

$$\dot{x}_1 = \frac{x_2}{\cos^2 t} + \tan t, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 \tan t + 1, \quad t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) =: I.$$

- (a) Bestimme alle Wronski-Determinanten des Systems.
- (b) Zeige, dass  $x(t) := (\tan t, 1)^{\top}$  das zugehörige homogene System löst und ergänze  $x(t)$  zu einer Fundamentalmatrix des homogenen Systems.
- (c) Bestimme die Lösung  $x(t)$  des inhomogenen Systems mit  $x(0) = (0, 1)^{\top}$ .

(2 + 3 + 3 Punkte)

4. Es seien  $F(t) := \begin{pmatrix} 0 & t^2 \\ 0 & t \end{pmatrix}$  und  $A(t) := \dot{F}(t)$  für  $t \in \mathbb{R}$ .

- (a) Berechne  $e^{F(t)}$  und  $\frac{d}{dt} e^{F(t)}$ .
- (b) Löst  $e^{F(t)}$  die Matrix-Differentialgleichung  $\dot{X} = A(t)X$ ?

(2 + 2 Punkte)

5. Es seien  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $A := \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix}$ . Betrachte das Anfangswertproblem  $\dot{x} = Ax$ ,  $x(0) = x_0$ . Für alle  $t \in \mathbb{R}$  und  $k \in \mathbb{N}$  seien  $x_0(t) := x_0$  und  $x_k(t) := x_0 + \int_0^t Ax_{k-1}(s) ds$  (komponentenweise Integration).

- (a) Zeige, dass  $x_k(t) = \sum_{\nu=0}^k \frac{(tA)^{\nu}}{\nu!} x_0$  für alle  $k \in \mathbb{N}$  gilt.
- (b) Berechne  $e^A$  und  $x(t) := \lim_{k \rightarrow \infty} x_k(t)$ .
- (c) Zeige, dass  $x(t)$  aus Teilaufgabe (b) das Anfangswertproblem löst.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.