Prof. Dr. W. Kratz
M. Harder

Winter 2014/2015
21.11.2014
Blatt 06

Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 01.12.2014, 14:00h vor H3)

1. Es sei $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (a) Berechne die Matrixpotenzen A^n für $n \in \mathbb{N}$.

   (b) Löse das folgende System von Differenzengleichungen:

   $$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - y_n \\ y_{n+1} &= x_n + y_n \end{aligned}$$

   mit $x_0 = 1$ und $y_0 = 0$.

   (2 + 2 Punkte)

2. Die Differentialgleichung

   $$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0, \quad x \in (-1, 1) \qquad (\star)$$

   wird *Legendresche Differentialgleichung* genannt. Eine Lösung von $(\star)$ ist durch $y_1(x) = x$ gegeben. Ergänze $y_1(x)$ mittels Wronski-Determinante zu einem Fundamentalsystem von $(\star)$.

   (3 Punkte)

3. (*Grundlösungsverfahren*) Es seien $a_0, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$ und $y(x)$ sei die Lösung des Anfangswertproblems

   $$L(y) := y^{(n)} + \sum_{\nu=0}^{n-1} a_\nu y^{(\nu)} = 0, \quad y(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = 0, \quad y^{(n-1)}(0) = 1.$$

   Zeige, dass für eine auf $\mathbb{R}$ stetige Funktion $b(x)$, durch $y_p(x)$ mit

   $$y_p(x) := \int_0^x y(x - t) b(t) \, \mathrm{d}t$$

   eine Lösung der inhomogenen Gleichung $L(y) = b(x)$ gegeben ist.

   (4 Punkte)

4. Löse die folgenden Anfangswertprobleme:

   (a) $\dot{x} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{smallmatrix}\right) x + \mathrm{e}^t \cos t \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$, $x(0) = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right)$.

   (b) $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

   (c) $y'' - 3y' + 2y = 10 \sin x$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

   (d) $y''' + 2y'' + 2y' + y = \cos x + \mathrm{e}^{-x}$, $y(0) = 1$, $y'(0) = y''(0) = 0$.

   (e) $y'' - y = x \cos x$, $y(0) = y'(0) = 0$.

   (3 + 2 + 2 + 3 + 3 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=58157