

Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 08.12.2014, 14:00h vor H3)

1. Untersuche die Lösungen von $\dot{x} = A(t)x$ mit

$$A(t) = \begin{pmatrix} -3 & 3 \sin t + 2 \\ \sin t - 2 & 4 \cos t - 3 \end{pmatrix}.$$

auf (asymptotische) Stabilität in $[0, \infty)$.

(2 Punkte)

2. Beispiel von **L. Markus** (1960): Es sei

$$A(t) = \begin{pmatrix} -1 + 3 \cos(8t) & 4 - 3 \sin(8t) \\ -4 - 3 \sin(8t) & -1 - 3 \cos(8t) \end{pmatrix}.$$

- (a) Berechne für $t \in \mathbb{R}$ die Eigenwerte von $A(t)$ und $B(t) := A(t) + A^\top(t)$.
(b) Es sei $t_0 \in \mathbb{R}$. Untersuche die Null-Lösung von $\dot{x} = A(t)x$ auf (asymptotische) Stabilität auf dem Intervall $I := [t_0, \infty)$.

Hinweis: Zeige, dass $x(t) := e^{2t}(-\cos(4t), \sin(4t))^\top$ eine Lösung ist.

(3 + 4 Punkte)

3. (a) Untersuche das autonome lineare System $\dot{x} = Ax$ mit

$$A := \begin{pmatrix} -2 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

auf (asymptotische) Stabilität.

- (b) Für welche Parameter $a, b, c \in \mathbb{R}$ sind die Lösungen der Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by + c = 0$$

(asymptotisch) stabil?

(2 + 3 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Der Pflanzenbestand sowie die Populationen von Raubtieren und Pflanzenfressern eines Ökosystems entwickeln sich gemäß der folgenden Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned}\dot{p} &= p(r - q - 1), \\ \dot{q} &= q(p - 1), \\ \dot{r} &= r(3 - r - p).\end{aligned}$$

- (a) Ordne die Funktionen $p(t)$, $q(t)$ und $r(t)$ den jeweiligen Populationen zu und begründe Deine Entscheidung.
- (b) Bestimme alle kritischen Punkte und untersuche, ob die zugehörigen Gleichgewichtslösungen (asymptotisch) stabil sind.

(2 + 4 Punkte)

5. Berechne für das Randwertproblem

$$y'' - y = f(x), \quad y(0) = y(2) = 0$$

die zugehörige Greensche Funktion (wie in Satz 11.2), also eine Funktion $G(x, t)$, so dass

$$y(x) = \int_0^2 G(x, t) f(t) dt$$

das obige Randwertproblem löst.

(3 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

<https://www.uni-ulm.de/?id=58157>