Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 22.12.2014, 14:00h vor H3)

- 1. (a) Es sei $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : \text{Re}(z) < 0, |\text{Im}(z)| < \pi\}$. Gib $D_2 := \exp(D_1)$ an und zeige, dass die Abbildung exp: $D_1 \to D_2$ bijektiv ist. Skizziere D_1 und D_2 .
 - (b) Es sei $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : |\text{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$. Gib $D_4 := \exp(D_3)$ an und zeige, dass die Abbildung $\exp \colon D_3 \to D_4$ bijektiv ist. Skizziere D_3 und D_4 .

(2 + 2 Punkte)

2. Es sei $M \subset \mathbb{C}$ und $f: M \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Weiter seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$, so dass

$$x \in M_1, y \in M_2 \iff x + iy \in M$$

gilt. Beweise die Bemerkung aus der Vorlesung, die besagt, dass f genau dann auf M stetig ist, wenn die beiden Abbildungen g_1 und g_2 mit

$$g_1(x,y) := \text{Re}(f(x+iy)), \quad g_2(x,y) := \text{Im}(f(x+iy))$$

auf $M_1 \times M_2$ stetig sind.

(3 Punkte)

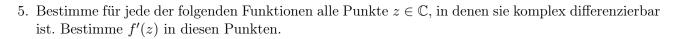
- 3. Gib für jede der folgenden Mengen M an, ob sie ein Gebiet, kurvenweise zusammenhängend, offen, abgeschlossen oder kompakt ist (oder mehrere der genannten Eigenschaften besitzt) und begründe jeweils Deine Antwort.
 - (a) $M := \left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < 4, \max\{\operatorname{Re}(z), \operatorname{Im}(z)\} \le 1 \right\}.$
 - $\text{(b)} \ \ M := \Big\{z \in \mathbb{C} : \min \big\{ \left| \operatorname{Re}(z) \right|, \left| \operatorname{Im}(z) \right| \big\} > 1 \Big\}.$
 - (c) $M := \left\{ z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| < 1 \right\}.$

(3+3+3) Punkte

- 4. Entscheide für jede der folgenden Funktionen, ob sie Realteil einer auf G holomorphen Funktion f ist. Begründe die Entscheidungen und bestimme gegebenenfalls f.
 - (a) $u(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, G = \mathbb{C} \setminus \{0\}.$
 - (b) $u(x, y) = \sin(x^2 + y^2), G = \mathbb{C}.$

(2+2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.



(a)
$$f(z) := z^3 + \text{Im}(z^2) - i\text{Re}(z^2)$$
.

(b)
$$f(z) := \sqrt{\left|\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)\right|}$$
.

(2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.