Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2014/2015
15.12.2014
Blatt 09

Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 22.12.2014, 14:00h vor H3)

1. (a) Es sei $D_1 := \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) < 0, |\mathrm{Im}(z)| < \pi\}$. Gib $D_2 := \exp(D_1)$ an und zeige, dass die Abbildung $\exp\colon D_1 \to D_2$ bijektiv ist. Skizziere D_1 und D_2.

   (b) Es sei $D_3 := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Im}(z)| < \frac{\pi}{2}\}$. Gib $D_4 := \exp(D_3)$ an und zeige, dass die Abbildung $\exp\colon D_3 \to D_4$ bijektiv ist. Skizziere D_3 und D_4.

(2 + 2 Punkte)

2. Es sei $M \subset \mathbb{C}$ und $f\colon M \to \mathbb{C}$ eine Abbildung. Weiter seien $M_1, M_2 \subset \mathbb{R}$, so dass

$$x \in M_1, y \in M_2 \quad \Longleftrightarrow \quad x + iy \in M$$

gilt. Beweise die Bemerkung aus der Vorlesung, die besagt, dass f genau dann auf M stetig ist, wenn die beiden Abbildungen g_1 und g_2 mit

$$g_1(x, y) := \mathrm{Re}\big(f(x + iy)\big), \quad g_2(x, y) := \mathrm{Im}\big(f(x + iy)\big)$$

auf $M_1 \times M_2$ stetig sind.

(3 Punkte)

3. Gib für jede der folgenden Mengen M an, ob sie ein Gebiet, kurvenweise zusammenhängend, offen, abgeschlossen oder kompakt ist (oder mehrere der genannten Eigenschaften besitzt) und begründe jeweils Deine Antwort.

   (a) $M := \Big\{z \in \mathbb{C} : |z| < 4, \max\big\{\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\big\} \leq 1\Big\}$.

   (b) $M := \Big\{z \in \mathbb{C} : \min\big\{|\mathrm{Re}(z)|, |\mathrm{Im}(z)|\big\} > 1\Big\}$.

   (c) $M := \Big\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)| < 1\Big\}$.

(3 + 3 + 3 Punkte)

4. Entscheide für jede der folgenden Funktionen, ob sie Realteil einer auf G holomorphen Funktion f ist. Begründe die Entscheidungen und bestimme gegebenenfalls f.

   (a) $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

   (b) $u(x, y) = \sin\big(x^2 + y^2\big)$, $G = \mathbb{C}$.

(2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Bestimme für jede der folgenden Funktionen alle Punkte $z \in \mathbb{C}$, in denen sie komplex differenzierbar ist. Bestimme $f'(z)$ in diesen Punkten.

   (a) $f(z) := z^3 + \operatorname{Im}\bigl(z^2\bigr) - i\operatorname{Re}\bigl(z^2\bigr)$.

   (b) $f(z) := \sqrt{\bigl|\operatorname{Re}(z)\operatorname{Im}(z)\bigr|}$.

(2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.