Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2014/2015
22.12.2014
Blatt 10

Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 12.01.2015, 14:00h vor H3)

1. Es sei $M := \big\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}(z) \in (1,2], \mathrm{Im}(z) \in [-2,1)\big\}$.

   (a) Es seien $x > 0$ und
   $$M_K := \left\{z \in \mathbb{C} : z = \frac{1}{2x}\big(1 + \mathrm{e}^{i\varphi}\big), \varphi \in (-\pi,\pi)\right\}, \qquad M_G := \{z \in \mathbb{C} : z = x + iy, y \in \mathbb{R}\}$$
   Zeige, dass die Abbildung $f\colon M_K \to M_G$ mit $f(z) = \frac{1}{z}$ bijektiv ist.

   (b) Skizziere $f(M)$ für $f(z) = \frac{1}{z}$.

   (c) Skizziere $f(M)$ für $f(z) = \frac{i\pi}{2}(1 - z)$.

   (2 + 1 + 2 Punkte)

2. Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ invertierbar und $T_A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ wie in der Vorlesung definiert.

   (a) Zeige $T_A \circ T_B = T_{AB}$.

   (b) Zeige $T_{A^{-1}} = \big(T_A\big)^{-1}$.

   (3 + 3 Punkte)

3. Bestimme eine Möbius-Transformation $T\colon \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ mit $T(-2i) = -\frac{1}{3}$, $T(\infty) = -\frac{1}{4}(1 + 2i)$ und $T(2 + 2i) = -\frac{1}{4}(1 + i)$.

   (2 Punkte)

4. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ sowie $c, d \in \mathbb{C}$ mit $c \neq 0$ und $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) := (1 - t)c + td$.

   (a) Zeige, dass
   $$\int_a^b \mathrm{e}^{ct}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\big(\mathrm{e}^{cb} - \mathrm{e}^{ca}\big)$$
   gilt.

   (b) Bestimme $\int_\gamma \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}z$ und $\int_\gamma \big|\mathrm{e}^z\big|\,\mathrm{d}z$.

   (2 + 2 Punkte)

5. Bestimme jeweils $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$.

   (a) $f(z) := |z|$ und γ sei die Kurve von $-i$ nach i auf der imaginären Achse.

   (b) $f(z) := |z|$ und γ sei die Kurve von $-i$ nach i auf dem Einheitskreis durch -1.

   (c) $f(z) := z + \overline{z}$ und $\gamma(t) := 2\cos t + i\sin t$ für $t \in [-\pi,\pi]$.

   (2 + 2 + 2 Punkte)

Wir wünschen allen eine entspannte vorlesungsfreie Zeit und einen guten Start ins neue Jahr.

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=58157