

## Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 19.01.2015, 14:00h vor H3)

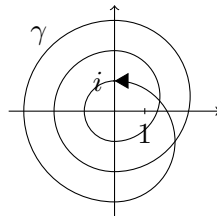
1. Es sei  $G \subset \mathbb{C}$  ein Gebiet und  $f: G \rightarrow \mathbb{C}$  holomorph. Zeige die folgenden Behauptungen.

- (a) Aus  $f(z) \in \mathbb{R}$  für alle  $z \in G$  folgt, dass  $f$  konstant ist.
- (b) Existiert ein  $c \in \mathbb{C}$  mit  $|f(z)| = c$  für alle  $z \in G$ , dann ist  $f$  konstant.

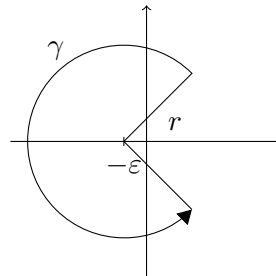
(3 + 3 Punkte)

2. Bestimme  $\int_{\gamma} f(z) dz$ . Windungszahlen dürfen gegebenenfalls einer Skizze entnommen werden.

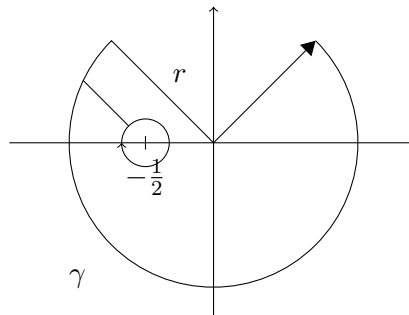
- (a)  $f(z) = e^{-(z-1)^2} - e^{-(z+1)^2}$ ,  $\gamma(t) = t e^{i3t} + \frac{3\pi}{2}$ ,  $t \in [0, 3\pi]$ .
- (b)  $f(z) = \frac{\cos z}{z}$ ,  $\gamma$  siehe Skizze:



- (c) Es seien  $\varepsilon, r > 0$  und  $f(z) = \frac{(z^2+5) \exp(z^2+z+\frac{1}{4})}{(z-3)^5}$ ,  $\gamma$  siehe Skizze:



- (d) Es sei  $r > 1$  und  $f(z) = \exp(z^2 + z + \frac{1}{4}) \frac{1}{z + \frac{1}{2}}$ ,  $\gamma$  siehe Skizze:



(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

*Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.*

3. (a) Zeige, dass  $f(z) = |z|$  auf  $\mathbb{C}$  keine Stammfunktion besitzt.  
(b) Bestimme  $\int_{|z|=1} |z| dz$ .  
(c) Bestimme  $\int_{|z|=2} \frac{z^3}{z^2+1} dz$ .  
(d) Bestimme  $\int_{|z-2|=3} \frac{\sin(z^4+1)-7}{(z-7)^{42}} dz$ .

(2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

4. Für die auf Blatt 10 in Aufgabe 5(b) und 5(c) auftretenden Integrale gilt  $\int_{\gamma} f(z) dz \neq 0$ . Weshalb kann jeweils der Cauchysche Integralsatz (Satz 2.3) nicht angewandt werden?

(2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

<https://www.uni-ulm.de/?id=58157>