Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Winter 2014/2015
19.01.2015
Blatt 12

Übungen zu Höhere Mathematik III

(Abgabe am Montag, den 26.01.2015, 14:00h vor H3)

1. Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. Zeige folgende Aussagen:
   (a) Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_1, \ldots, p_n \in G$ mit $p_i \neq p_j$ falls $i \neq j$. Die Funktion $f\colon G \to \mathbb{C}$ sei stetig und auf $G \setminus \{p_1, \ldots, p_n\}$ holomorph. Zeige, dass daraus folgt, dass f auf ganz G holomorph ist.
   (b) Es seien f eine ganze Funktion und $R > 0$. Wenn $\left|f(z)\right|$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > R$ beschränkt ist, dann ist f konstant.
   (c) Die Potenzreihe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ mit $a_n \in \mathbb{C}$ konvergiere für alle $z \in U_r(0)$ für ein $r > 1$. Wenn $f\left(\frac{1}{k}\right) = f\left(-\frac{1}{k}\right)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, dann ist $a_{2n+1} = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(3 + 3 + 3 Punkte)

2. Berechne $\int_{|z|=2} \frac{\mathrm{e}^{2z}}{(z+1)^4} \,\mathrm{d}z$.

(2 Punkte)

3. Bestimme für die folgenden Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ jeweils $\max\left\{\left|f(z)\right| : |z| \leq 1\right\}$.
   (a) $f(z) = 3 - \left|z - \frac{i}{2}\right|^2$.
   (b) $f(z) = \cos(z)$.

(2 + 3 Punkte)

4. Bestimme Art und Lage der Singularitäten folgender Funktionen:
   (a) $f(z) = \sin\left(\frac{\pi}{z^2+1}\right)$.
   (b) $f(z) = \frac{z^2-4}{z^3+z-10}$.
   (c) $f(z) = \frac{1}{z^2(1-\mathrm{e}^{2i\pi z})}$.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber zu zweit aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=58157