Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte und 12 Zusatzpunkte
Abgabe: Montag, 12. Januar 2015, vor den Übungen

1. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$ und $\varphi\colon V \to V$ linear. Zeige, dass aus $\varphi^2 = \varphi$ sowohl $V = \mathrm{Kern}(\varphi) + \mathrm{Bild}(\varphi)$ als auch $\mathrm{Kern}(\varphi) \cap \mathrm{Bild}(\varphi) = \{\vec{0}\}$ folgt. (4 Punkte)

2. Es seien der Vektorraum $V = \{p = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \colon a_k \in \mathbb{R},\ 0 \le k \le 3\}$ und die lineare Abbildung $\varphi\colon V \to V$ mit $\varphi\colon p(x) \to p(2x) + p'(x+1) + x \cdot p''(x)$ gegeben. Bestimme die Darstellungsmatrix $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_i, \mathcal{B}_j)$ für $1 \le i, j \le 2$ mit der Standardbasis $\mathcal{B}_1 = \{1, x, x^2, x^3\}$ und der aus den ersten vier Hermitepolynomen bestehende Basis $\mathcal{B}_2$ (siehe Übungsblatt 9). (8 Punkte)

3. Wir definieren
$$\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_2 - x_3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 \end{pmatrix} =: \vec{v}.$$
   (a) Ist φ linear, injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?
   (b) Ermittle $\dim \varphi(\mathbb{R}^3)$ sowie eine Basis von $\varphi(\mathbb{R}^3)$ und $\mathrm{Kern}(\varphi)$.
   (c) Gib $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_4, \mathcal{B}_3)$ mit den Basen $\mathcal{B}_3 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ des $\mathbb{R}^3$ und $\mathcal{B}_4 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ des $\mathbb{R}^4$ an.
   (d) Bestimme $\mathcal{M}(\psi; \mathcal{B}_j, \mathcal{B}_j)$ für $j \in \{4, 5\}$ sowie $\psi\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ mit $\psi\colon \vec{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \to \vec{v}$ und der Basis $\mathcal{B}_5 = \{-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3 + \vec{e}_4, -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3, \vec{e}_4, 5\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3 + 7\vec{e}_4\}$. (11 Punkte)

4. Es seien V und W reelle n- dimensionale Vektorräume, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \dots \vec{b}_n\}$ eine Basis von W und $\varphi\colon V \to W$ linear. Wir definieren für $k = 1, \dots, n$ die Mengen $S_k := \{\vec{x} \in V \colon \varphi(\vec{x}) = r \cdot \vec{b}_k,\ r \in \mathbb{R}\}$ sowie $T_k := \{\vec{x} \in V \colon \varphi(\vec{x}) = \sum_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} r_l \cdot \vec{b}_l,\ r_l \in \mathbb{R}\}$. Zeige folgende Aussagen für alle $1 \le k \le n$:
   (a) Die Mengen S_k und T_k sind Unterräume von V.
   (b) Es gilt $S_k \cap T_k = \mathrm{Kern}(\varphi)$ und $S_{k_1} \cap S_{k_2} = \mathrm{Kern}(\varphi)$ für $k_1 \ne k_2$.
   (c) Es gilt die Darstellung $S_k = \bigcap_{\substack{l=1 \\ l \ne k}}^{n} T_l$.
   (d) Begründe, unter welcher Bedingung $\dim S_k = 1$ gilt.
   (e) Begründe, unter welcher Bedingung $\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \ldots + \vec{x}_n$ für $\vec{x} \in V$ und $\vec{x}_k \in S_k$ folgt.
   (f) Es sei $n = 4$, $V = W$ und
$$\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$
   Ermittle Basen von S_1, S_2, T_3 und von $\varphi(S_2)$. (13 Punkte)

Wir wünschen Euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr 2015!