Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 19. Januar 2015, vor den Übungen

1. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Gegeben sei eine lineare Abbildung $\varphi \in L(V, V)$ durch $\varphi\colon \vec{x} \to A \cdot \vec{x}$ über
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Ermittle alle Fixelemente dieser Abbildung und bestimme davon eine Basis.
   (b) Erweitere diese zu einer Basis $\mathcal{B}$ von V, so dass $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ Diagonalgestalt hat. (5 Punkte)

2. (a) Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Ermittle alle linearen Abbildungen $\varphi \in L(V, V)$ mit den Fixelementen
$$\vec{a}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{a}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$
   (b) Welche dieser Abbildungen sind Automorphismen? (4 Punkte)

3. Es seien $\varphi \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ mit $\varphi(x, y) = (x-y, y, x+y)^T$ sowie $\rho \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ mit $\rho(x, y) = (2x+y, x)^T$ und $\sigma \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ mit $\sigma(x, y, z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z)^T$ definiert.
   (a) Bestimme $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1)$ mit $\mathcal{B}_1 = \{(2, 1)^T, (1, 1)^T\}$ und $\mathcal{B}_2 = \{(1, 1, 0)^T, (1, 0, 1)^T, (0, 1, 1)^T\}$.
   (b) Zeige, dass ρ und σ Automorphismen sind.
   (c) Ermittle $\mathcal{M}(\varphi; \sigma(\mathcal{B}_2), \rho(\mathcal{B}_1))$. (6 Punkte)

4. Gegeben sei $\varphi \in L(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$ und $\mathcal{B} = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4\}$ mit
$$\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}) = \begin{pmatrix} 60 & 46 & 61 & -44 \\ 100 & 78 & 103 & -74 \\ -36 & -30 & -37 & 28 \\ 124 & 94 & 127 & -90 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \sigma(\mathcal{B}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} \right\}.$$
   (a) Bestimme $\mathcal{M}(\sigma; \mathcal{B}, \mathcal{B})$.
   (b) Gib die Darstellungsmatrix von φ als Diagonalmatrix an. (4 Punkte)

5. Es sei $\varphi \in L(K^n, K^m)$ mit $\varphi\colon \vec{x} \to A \cdot \vec{x}$ und $A \in K^{(m,n)}$ sowie $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n\}$ die Standardbasis des K^n und $\mathcal{B}_2 = \{\vec{\epsilon}_1, \ldots, \vec{\epsilon}_m\}$ die Standardbasis des K^m.
   (a) Für $i \neq j$ und $k \neq l$ seien $\mathcal{B}_1'$ bzw. $\mathcal{B}_2'$ die Basen, die aus $\mathcal{B}_1$ bzw $\mathcal{B}_2$ durch Vertauschung von $\vec{e}_i$ und $\vec{e}_j$ bzw. $\vec{\epsilon}_k$ und $\vec{\epsilon}_l$ entstehen. Bestimme $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1')$ sowie $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_2', \mathcal{B}_1)$.
   (b) Für $i \neq j$, $k \neq l$ sowie $\lambda \in K$ seien $\mathcal{B}_1''$ bzw. $\mathcal{B}_2''$ die Basen, die aus $\mathcal{B}_1$ bzw $\mathcal{B}_2$ durch Ersetzung von $\vec{e}_i$ durch $\vec{e}_i + \lambda \cdot \vec{e}_j$ bzw. von $\vec{\epsilon}_k$ und $\vec{\epsilon}_k + \lambda \cdot \vec{\epsilon}_l$ entstehen.
   Bestimme $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1'')$ sowie $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_2'', \mathcal{B}_1)$. (5 Punkte)