Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 2. Februar 2015, vor den Übungen

1. Wir betrachten den Vektorraum $V = \mathbb{C}^4$ über $\mathbb{C}$. Gegeben seien die linearen Mannigfaltigkeiten

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -i \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \quad \text{und} \quad M_2 = \left\langle \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ i \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

   (a) Gib lineare Gleichungssysteme an, die M_1 bzw. M_2 als Lösungsmenge besitzen.

   (b) Konstruiere daraus ein LGS, dessen Lösungsmenge der Schnitt $M = M_1 \cap M_2$ ist.

   (c) Bestimme die lineare Mannigfaltigkeit M in der Form $M = \vec{x}_0 + \langle \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k \rangle$ mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus. (6 Punkte)

2. Zeige Satz 7.1.2. (2 Punkte)

3. Bestimme für die Permutationen $\sigma, \tau \in \gamma_6$ mit

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) i. $\sigma \circ \tau$ und $\tau \circ \sigma$

   ii. die Inversionen von σ und τ

   iii. $\operatorname{sgn}(\sigma)$, $\operatorname{sgn}(\tau)$, $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau)$ und $\operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma)$.

   (b) Stelle σ und τ als Produkt von Transpositionen dar. (5 Punkte)

4. Eine Permutation $\sigma \in \gamma_n$ heißt k- Zyklus, falls paarweise verschiedene Zahlen $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$ existieren, so dass

   - $\sigma(a_1) = a_2,\ \sigma(a_2) = a_3, \ldots, \sigma(a_{k-1}) = a_k,\ \sigma(a_k) = a_1,$
   - $\sigma(b) = b$ für alle $b \notin \{a_1, \ldots, a_k\}$

   erfüllt sind. Zeige:

   (a) Ist σ ein k- Zyklus, so gilt $\sigma^k = id_{\{1,\ldots,n\}}$ und $\sigma^l \neq id_{\{1,\ldots,n\}}$ für alle l mit $1 \leq l < k$.

   (b) Jeder k- Zyklus lässt sich als Produkt von $k-1$ Transpositionen auffassen. (5 Punkte)

5. Es sei $A_k = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{(n,n)}$ für $1 \leq k \leq 3$. Bestimme $\sum_{\sigma \in \gamma_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{j,\sigma(j)} \right)$ für

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t+1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{(2,2)}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i \\ -1 & 0 & 1+i \\ i & -i & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(3,3)} \quad \text{und} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 26 & 1 & 57 \\ 7 & 17 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(4,4)}.$$

(6 Punkte)