Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 36 Punkte, alles Zusatzpunkte
Abgabe: **Donnerstag, 12. Februar 2015**, vor den Übungen

1. Gegeben seien $A, B \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -6 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{sowie} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 16 \\ -10 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$
   (a) Berechne die Determinante der Matrix A mit dem Laplaceschen Entwicklungssatz.
   (b) Bestimme x_2 des LGS $B\vec{x} = \vec{b}$ mit der Cramerschen Regel.
   (c) Berechne $\det(A \cdot B)$. (5 Punkte)

2. (a) Berechne das charakteristische Polynom, die Eigenwerte mit geometrischen und algebraischen Vielfachheiten, die Eigenvektoren sowie eine Darstellung der Eigenräume der Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -2 & -i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(2,2)}.$$
   (b) Berechne A^{16}. (6 Punkte)

3. Es sei $V = \mathbb{R}^3$ mit den Basen $\mathcal{B}_1 = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ sowie
$$\mathcal{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$
gegeben. Weiter sei die Abbildung $\varphi \in L(V, V)$ über die dieser Basen zugeordnete Matrix
$$\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_2, \mathcal{B}_1) = \begin{pmatrix} -6 & 37 & -21 \\ -53 & 353 & -208 \\ -100 & 662 & -389 \end{pmatrix}$$
gegeben. Bestimme eine Basis $\mathcal{B}_3$, so dass $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}_3, \mathcal{B}_3)$ Diagonalgestalt besitzt. (7 Punkte)

4. Es sei $A \in K^{(n,n)}$ und $\alpha \in K$. Zeige die folgenden Aussagen:
   (a) Es gilt $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.
   (b) Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn 0 kein Eigenwert von A ist. (4 Punkte)

5. (a) Es seien $A, B \in \mathbb{C}^{(n,n)}$ gegeben. Zeige:
      i. $\operatorname{Spur}(A + B) = \operatorname{Spur} A + \operatorname{Spur} B$
      ii. $\operatorname{Spur}(\alpha A) = \alpha \cdot \operatorname{Spur} A$ für alle $\alpha \in \mathbb{C}$
      iii. $\operatorname{Spur}(AB) = \operatorname{Spur}(BA)$
   (b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{(5,5)}$ und besitze die Eigenwerte $2i$ und $1 + 3i$. Ferner gelte $\operatorname{Spur} A = 0$. Berechne die Determinante von A. (7 Punkte)

6. Es sei K ein endlicher Körper mit q Elementen und $q > 1$. Einen Unterraum des K^n nennt man eine linearen Code C der Länge n mit Alphabet K. Die Elemente von K heißen Codeworte. Es bezeichne $d(\vec{x}, \vec{y}) = |\{j \in \{1, \dots, n\} \colon x_j \neq y_j\}|$ den Hammingabstand zweier Elemente $\vec{x}, \vec{y} \in K^n$ mit $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ und $\vec{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$.
Unter dem Gewicht w von $\vec{x}$ versteht man die Anzahl der von null verschiedenen Stellen, unter dem Minimalgewicht w_0 des Codes C den kleinsten Wert, den die Gewichtsfunktion $w(\vec{x})$ für $\vec{x} \in C \backslash \{\vec{0}\}$ annimmt, und unter dem Minimalabstand d_0 von C den kleinsten Wert, den $d(\vec{x}, \vec{y})$ für $\vec{x}, \vec{y} \in C$ mit $\vec{x} \neq \vec{y}$ annehmen kann. Eine Matrix $H \in K^{(m,n)}$ mit $\operatorname{rg}(H) = m$ heißt Kontrollmatrix von C, wenn $C = \{\vec{x} \in K^n \colon H\vec{x} = \vec{0}\}$ ist.

   (a) Zeige, dass $d_0 = \omega_0$ gilt.

   (b) Wieviele Codeworte besitzt der Code C?

   (c) Wieviele Kontrollmatrizen hat der Code C?

   Es sei $K = \mathbb{F}_2$ und $C \subset K^7$ als Lösungsmenge des LGS

$$\begin{array}{ccccccccc} & x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & & & = 0 \\ x_1 & & +x_3 & +x_4 & & +x_6 & & = 0 \\ x_1 & +x_2 & & +x_4 & & & +x_7 & = 0. \end{array}$$

   (d) Bestimme eine Basis von C.

   (e) Gib eine Kontrollmatrix für den Code C an, die von der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   verschieden ist. (7 Punkte)