Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 27. Oktober 2014, vor den Übungen

1. Es seien die Mengen $M = \{1, 2, 3, 4\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}\}$ gegeben. Bestimme die Mengen
   (a) $\{1, 2\} \cap \{2, 3\}$
   (b) $\{1, 2\} \backslash \{1, 3\}$
   (c) $\{1, 2\} \times \{1, 3\}$
   (d) $\{1, 3, 4, 5\} \backslash M$
   (e) $\{1, 3, 4, 5\} \backslash \{M\}$
   (f) $\bigcap_{A \in \mathcal{A}} A$
   (g) $\bigcup_{A \in \mathcal{A}} A$
   (h) $\mathcal{A} \cap M$ (5 Punkte)

2. Gegeben sei die Funktion $f \colon \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 3, 5\}$ mit $f(1) = 1$, $f(2) = 3$, $f(3) = 5$ und $f(4) = 5$. Unter dem Urbild einer Menge M bzgl. f verstehen wir die Menge $f^{-1}(B) := \{x \in X \colon f(x) \in B\}$.
   (a) Gib $f(\{1, 2\})$, $f^{-1}(\{3\})$, $f^{-1}(\{5\})$ und $f^{-1}(\{7\})$ an.
   (b) Ist f injektiv, surjektiv oder bijektiv? (4 Punkte)

3. Prüfe, welche dieser gegebenen Abbildungen f_i mit $1 \leq i \leq 6$ injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Gib dazu entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.
   (a) $f_1 \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $x \to 2x + 1$
   (b) $f_2 \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x \to -x + 7$
   (c) $f_3 \colon \mathbb{R} \to \{y \colon y \in \mathbb{R} \text{ und } y \geq 0\}$, $x \to x^2$
   (d) $f_4 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \to \frac{1}{x^2+1}$
   (e) $f_5 \colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $x \to 2x + 1$
   (f) $f_6 \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(x, y) \to \left(xy, \frac{x}{y}\right)$ (6 Punkte)

4. Zeige, dass eine Abbildung $f \colon X \to Y$ genau dann injektiv ist, wenn für jedes Paar von Teilmengen $X_1, X_2 \subset X$ die Aussage $f(X_1) \cap f(X_2) = f(X_1 \cap X_2)$ gilt. (4 Punkte)

5. Es seien $f \colon X \to Y$ und $g \colon Y \to Z$ Abbildungen und $g \circ f \colon X \to Z$, $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ die Komposition von f und g. Zeige:
   (a) Sind f und g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
   (b) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist auch f injektiv.
   (c) Gib ein Beispiel an, in dem $g \circ f$ und f injektiv sind, g aber nicht. (5 Punkte)