Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 3. November 2014, vor den Übungen

1. Zeige die Regeln von de Morgan aus der Vorlesung:
$$\left(\bigcup_{M\in\mathcal{S}} M\right)' = \bigcap_{M\in\mathcal{S}} (M') \quad \text{und} \quad \left(\bigcap_{M\in\mathcal{S}} M\right)' = \bigcup_{M\in\mathcal{S}} (M')$$
für ein Mengensystem $\mathcal{S}$ mit $M \in \mathcal{S}$, die Teilmengen einer "Universalmenge" U sind. (4 Punkte)

2. Überprüfe, ob die folgenden Paare von Mengen und Verknüpfungen ggfs. abelsche Gruppen bilden:
   (a) $(G, \circ)$ mit $G = \{f\colon X \to X\}$ auf einer Menge X und $\circ$ als der Komposition von Abbildungen
   (b) $(G, \star)$ mit $G = \mathbb{R}$ und
$$\star\colon \begin{cases} G \times G \to G \\ (a,b) \to a \star b := \frac{a+b}{2} \end{cases}$$
   (c) $(G, \cdot)$ mit $G = \{1\}$ und der gewöhnlichen Multiplikation (3 Punkte)

3. (a) Wir betrachten die binären Verknüpfungen $\wedge$ (UND), $\vee$ (ODER) und $\oplus$ (XOR, das exklusive Oder) auf $\mathbb{B} = \{0, 1\}$ mit
$$\begin{array}{c|cc} \wedge & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}, \quad \begin{array}{c|cc} \vee & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{c|cc} \oplus & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array}.$$
   Bestimme über die Angabe sämtlicher neutraler und inverser Elemente oder eines Gegenbeispiels für jede Verknüpfung, welche der Axiome G2 und G3 gültig sind.
   (b) Es seien a, b, c beliebige Symbole. Konstruiere eine Verknüpfung $\circ$ durch Ausfüllen der Tabelle

∘	a	b	c
a			
b			
c			

   auf der Menge $X = \{a, b, c\}$, so dass $(X, \circ)$ eine abelsche Gruppe bildet. (6 Punkte)

4. Es sei G eine endliche Gruppe, und wir verknüpfen alle Elemente von links mit einem beliebigen Element der Gruppe. Zeige, dass man wieder sämtliche Elemente der Gruppe erhält. (3 Punkte)

5. Es sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und $Z(G) := \{a \in G\colon a \cdot b = b \cdot a \text{ für alle } b \in G\}$ das Zentrum von G. Zeige, dass $(Z(G), \cdot)$ eine abelsche Gruppe darstellt. (4 Punkte)

6. Es seien $\sigma, \tau \in \gamma_5$ (vgl. Beispiel 2.2.7) mit
$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$
Bestimme die Permutationen $\tau \circ \sigma$, $\sigma \circ \tau$, σ^2, τ^2, σ^3, σ^5, τ^{-1} und σ^{1280}. (4 Punkte)