Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 10. November 2014, vor den Übungen

1. In der Menge $M := \{(a_1, a_2) \colon a_1, a_2 \in \mathbb{Z}\}$ seien folgende Verknüpfungen definiert:

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\ (a_1, a_2) \odot (b_1, b_2) &:= (a_1 b_2, a_2 b_1).\end{aligned}$$

   (a) Zeige, dass M mit diesen Verknüpfungen keinen Ring bildet.

   (b) Es sei $T \subset M$ mit $T := \{(a_1, a_2) \in M \colon a_2 = 0\}$. Stellt $(T, \oplus, \odot)$ einen Ring dar? (5 Punkte)

2. Es sei $m \in \mathbb{N}$.

   (a) Es sei $r \in \mathbb{Z}$, und wir definieren die Menge

$$\overline{r} := \{n \in \mathbb{Z} \colon n = r + k \cdot m,\ k \in \mathbb{Z}\},$$

   welche man als Restklassen modulo m bezeichnet. Die Zahl r nennt man einen Repräsentanten und die Zahl m den Modul der jeweiligen Restklasse. Zeige, dass die Mengen $\overline{r}$ und $\overline{s}$ mit $s \in \mathbb{Z}$ genau dann gleich sind, wenn $r - s$ ein ganzzahliges Vielfaches von m ist.

   (b) Die Menge der Restklassen modulo m wird mit $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ bezeichnet.
   Zeige, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ genau m Mengen enthält.

   (c) Die Addition von Restklassen sei durch $\overline{r} + \overline{s} := \overline{r + s}$ definiert. Zeige, dass die Addition wohldefiniert ist, also nicht von der Auswahl der Repräsentanten abhängt.

   (d) Zeige, dass $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ mit der oben erklärten Addition eine abelsche Gruppe bildet.

   (e) Wir definieren auf $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ in analoger Weise über $\overline{r} \cdot \overline{s} := \overline{r \cdot s}$ eine Multiplikation, wobei wir nur die Restklasse $\overline{0}$ ausnehmen. Unter welchen Vorausetzungen liegt dann eine Gruppe vor? Ist diese im Falle der Existenz abelsch?

   (f) Ist $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}, +, \cdot)$ auch ein Ring bzw. ein Körper?

   (g) Gib für $m = 2$ diese Struktur aus Teilaufgabe f) explizit an. (12 Punkte)

3. Es sei $K = (\{0, 1\}, +, \cdot)$ der Körper aus Beispiel 2.3.6 mit der dort definierten Addition $+$ und Multiplikation $\cdot$. Auf $K \times K$ seien zwei Verknüpfungen $\oplus$ und $\odot$ über

$$\begin{aligned}(a_1, a_2) \oplus (b_1, b_2) &:= (a_1 + b_1, a_2 + b_2)\\ (a_1, a_2) \odot (b_1, b_2) &:= (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2, a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2)\end{aligned}$$

   mit $a_i, b_i \in K$ für $i = 1, 2$ definiert.

   (a) Stelle die Verknüpfungstafeln für die Addition und die Multiplikation in $K \times K$ auf.

   (b) Zeige, dass $\mathbb{F}_4 := (K \times K, \oplus, \odot)$ einen Körper mit vier Elementen darstellt.

   (c) Dieser Körper lässt sich auch als $\mathbb{F}_4 = (\{0, 1, t, t + 1\}, +, \cdot)$ schreiben. Gib t^2 an. (7 Punkte)