Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 17. November 2014, vor den Übungen

1. Zeige Satz 2.4.5. (3 Punkte)

2. (a) Berechne Real- und Imaginärteil sowie den Betrag folgender komplexer Zahlen:
$$z_1 = \frac{2i}{1-i}, \quad z_2 = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, \quad z_3 = z_2^4 \quad \text{und} \quad z_4 = \sum_{k=0}^{7} z_2^k.$$
   (b) Es sei $\mathbb{H}^+ := \{z \in \mathbb{C} : \ \Im(z) > 0\}$ die obere Halbebene. Zeige: $z \in \mathbb{H}^+ \Leftrightarrow -\frac{1}{z} \in \mathbb{H}^+$.
   (c) Skizziere die Menge $M = \left\{z \in \mathbb{C} \colon \Re\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2}\right\}$. (5 Punkte)

3. (a) Ermittle die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ der Gleichung $z^5 = 1$.
   (b) Bestimme ein $\zeta \in \mathbb{C}$, so dass sich alle Elemente von $\mathcal{L}$ als Potenz von ζ darstellen lassen.
   (c) Welche Struktur erhält man, wenn man die Elemente von $\mathcal{L}$ in der komplexen Ebene aufträgt?
   (d) Zeige und deute $|\zeta^2 - 1| \colon |\zeta - 1| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. (5 Punkte)

4. Wir definieren neben der imaginären Einheit i weitere Einheiten j und k mit $j^2 = k^2 = ijk = -1$. Es sei $\mathbb{H} := \{z = a + bi + cj + dk \colon a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$, wobei $\Re(z) = a$ der Realteil und $\Im(z) = bi + cj + dk$ der Imaginärteil von z benannt wird. Dementsprechend gilt $\overline{z} := \Re(z) - \Im(z) = a - bi - cj - dk$. Die Addition in $\mathbb{H}$ werde komponentenweise ausgeführt und die Multiplikation durch einzelnes Ausmultiplizieren und Anwenden der obigen Rechenregeln. Weiter gelte $r \cdot z = z \cdot r$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $z \in \mathbb{H}$.
   (a) Bestimme für das Element $z_0 = -ki \in \mathbb{H}$ eine Darstellung $z_0 = \Re(z_0) + \Im(z_0)$.
   (b) Zeige $z\overline{z} \geq 0$ und dass $z\overline{z} = 0$ genau dann gilt, wenn $z = 0$ gilt.
   (c) Zeige, dass $(\mathbb{H}, +)$ eine abelsche Gruppe bildet.
   (d) Wie sieht das neutrale Element der Multiplikation aus?
   (e) Bestimme zu $z \in \mathbb{H}\backslash\{0\}$ das multiplikative Inverse.
   (f) Zeige die Abgeschlossenheit der Multiplikation auf $\mathbb{H}\backslash\{0\}$.
   (g) Beweise, dass die Multiplikation in $\mathbb{H}\backslash\{0\}$ nicht kommutativ ist. (6 Punkte)

5. Prüfe mit Angabe eines Beweis oder Gegenbeispiels, ob die Tripel $(V, K, \odot)$ Vektorräume bilden, wobei die Addition jeweils komponentenweise ausgeführt wird:
   (a) $K = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$ und $\lambda \odot (x, y) = (\lambda \cdot x, -\lambda \cdot y)$ mit der gewöhnlichen Multiplikation $\cdot$
   (b) Es sei K ein beliebiger Körper, $V = U \times W$ mit beliebigen Vektorräumen U und W über K und skalaren Multiplikationen $\odot_U$ bzw. $\odot_W$ und $\lambda \odot (\vec{u}, \vec{w}) = (\lambda \odot_U \vec{u}, \lambda \odot_W \vec{w})$. (3 Punkte)

6. Gibt es auf $\mathbb{R}$ eine Vektorraumstruktur über dem Körper $\mathbb{C}$, so dass die skalare Multiplikation $\mathbb{C} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eingeschränkt auf $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ die übliche Multiplikation reeller Zahlen darstellt? (2 Punkte)