Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 24. November 2014, vor den Übungen

1. Es sei $V = \mathbb{R}^+$, auf der eine Addition $+$ durch die gewöhnliche Multiplikation reeller Zahlen und eine Multiplikation durch $\lambda \circ v = v^\lambda$ definiert ist. Begründe, ob sich damit ein reeller Vektorraum, ein Ring bzw. ein Körper definieren lässt. (4 Punkte)

2. Es sei M eine nichtleere Menge.
   Wir betrachten auf der Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ von M, d.h. $\mathcal{P}(M) := \{N\colon N \subseteq M\}$, für $A, B \in \mathcal{P}(M)$ die Verknüpfung $A\Delta B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Weiter sei eine skalare Multiplikation $\circ$ über $0 \circ A = \emptyset$ und $1 \circ A = A$ für alle $A \in \mathcal{P}(M)$ definiert. Schließlich sei $U = \{A \in \mathcal{P}(M)\colon |A| = 2 \cdot k,\ k \in \mathbb{N}_0\}$.
   (a) Zeige, dass $V := (\mathcal{P}(M), \Delta, \circ)$ ein Vektorraum über dem Körper mit zwei Elementen ist.
   (b) Zeige, dass U ein Unterraum von V ist. (5 Punkte)

3. Begründe jeweils, ob U ein Untervektorraum des Vektorraums V über K ist:
   (a) $V = \{f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\}$, $U = \{f\colon \mathbb{Q} \to \mathbb{Q},\ f \text{ injektiv}\}$ und $K = \mathbb{Q}$
   (b) $V = \{f\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{R}\}$, $U = \{f \in V\colon \exists a \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{Z}\colon -a \leq f(x) \leq a\}$ und $K = \mathbb{R}$
   (c) $V = \mathbb{R}^4$, $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^3\colon x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 0\}$ und $K = \mathbb{R}$
   (d) $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) = \Im(z)\}$ und $K = \mathbb{R}$
   (e) $V = \mathbb{C}$, $U = \{z \in \mathbb{C}\colon \Re(z) = \Im(z)\}$ und $K = \mathbb{C}$ (5 Punkte)

4. (a) Zeige Satz 3.2.10.
   (b) Zeige, dass die Vereinigung beliebig vieler Unterräume eines Vektorraums nicht wieder ein Unterraum von V zu sein braucht.
   (c) Es seien U und W Unterräume eines Vektorraums V. Zeige, dass $U \cup W$ genau dann ein Unterraum von V ist, wenn $U \subseteq W$ oder $W \subseteq U$ gilt. (3 Punkte)

5. Es sei K ein Körper und $K[x]$ der Vektorraum der Polynome über K.
   Zeige, dass die folgenden drei Mengen gleich sind:
   - $U = \langle 1, x, x^2 \rangle$
   - $V = \langle 1 \rangle + \langle x \rangle + \langle x^2 \rangle$
   - $W = \{p(x)$ ein Polynom mit Koeffizienten aus $K\colon \deg(p) \leq 2\}$ (2 Punkte)

6. (a) Es sei K ein Körper. Zeige, dass auf jeden Unterraum des Vektorraumes $V = K^2$ über K eine der folgenden Aussagen zutrifft:
   - $U = \{\vec{0}\}$
   - Es gibt ein $\vec{v} \in V$ mit $\vec{v} \neq \vec{0}$ und $U = \{\alpha\vec{v}\colon \alpha \in \mathbb{R}\}$.
   - $U = V$

   (b) Es sei $\mathbb{F}_{11} = \mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Wie viele Unterräume besitzt der $\mathbb{F}_{11}$- Vektorraum $\mathbb{F}_{11} \times \mathbb{F}_{11}$? (5 Punkte)