Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 1. Dezember 2014, vor den Übungen

1. Überprüfe, ob die folgenden Mengen M_i an Vektoren des Vektorraums V_i über K_i für $i = 1, 2$ linear abhängig oder unabhängig sind:

   (a) $V_1 = \mathbb{F}_4^3$, $K_1 = \mathbb{F}_4$ und
   $$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t+1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t+1 \end{pmatrix} \right\}$$

   (b) $V_2 = \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \colon a_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 3\}$, $K_2 = \mathbb{R}$ und $M_2 = \{3, x-5, x^2+10x, x^3\}$

   (4 Punkte)

2. Es seien $V = \{f \colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}\}$, $n \in \mathbb{N}_0$ und $U = \{f \in V \colon f(n+2) = f(n) + f(n+1)\}$ sowie $f_1, f_2 \in V$ mit
   $$f_1(n) := \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \quad \text{und} \quad f_2(n) := \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

   (a) Zeige, dass U ein Unterraum von V ist.

   (b) Zeige $f_1, f_2 \in U$.

   (c) Zeige, dass f_1 und f_2 linear unabhängig sind.

   (d) Bestimme $f \in U$ mit $f(0) = f(1) = 1$.

   (e) Zeige: Für $\alpha_0, \alpha_1 \in \mathbb{R}$ gibt es genau ein $f \in U$ mit $f(0) = \alpha_0$ und $f(1) = \alpha_1$, nämlich
   $$f = \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\alpha_1 - \alpha_0 \cdot \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \cdot f_1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(\alpha_0 \cdot \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \alpha_1\right) \cdot f_2.$$

   (f) Bestimme $\dim U$.

   (g) Zeige, dass f_1 und f_2 eine Basis von U bilden. (10 Punkte)

3. Es sei V ein Vektorraum über K und $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ linear unabhängige Vektoren in V. Es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ beliebig und
   $$\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i.$$
   Wir definieren weiter $\vec{x}_i = \vec{v}_i - \vec{w}$ für $1 \leq i \leq n$. Zeige, dass die Vektoren $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n$ genau dann linear abhängig sind, wenn $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ gilt. (4 Punkte)

4. Es sei $V = \{p = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \colon a_i \in \mathbb{R},\ 1 \leq i \leq 3\}$ und $M = \{2, x^2 - x - 1, x^2 + x, x\}$.

   (a) Zeige, dass M linear abhängig ist.

   (b) Ermittle eine linear unabhängige Teilmenge M^* von M.

   (c) Gib die Koeffizienten von $x \in M \backslash M^*$ als Linearkombination der Elemente von M^* an.

   (d) Erweitere M^* zu einer Basis von V. (6 Punkte)