Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 8. Dezember 2014, vor den Übungen

1. Zeige Satz 4.1.5. (3 Punkte)

2. Es sei V ein Vektorraum über K mit $\dim V = n$. Weiter seien $W_1, \ldots, W_m$ Unterräume von V mit $\dim W_i = n-1$ für $1 \leq i \leq m$ und $\dim(W_1 \cap \ldots \cap W_m) = n-k$ gegeben.
Zeige, dass es k Indizes $1 \leq i_1, \ldots, i_k \leq m$ mit $W_{i_1} \cap \ldots \cap W_{i_k} = W_1 \cap \ldots \cap W_m$ gibt. (4 Punkte)

3. Es seien die reellen Matrizen
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 & -3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ -1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
sowie die Einheitsmatrix $E_3 \in \mathbb{R}^{(3,3)}$ gegeben. Bestimme im Falle der Existenz
   (a) $A \cdot B + 3 \cdot A$
   (b) $C \cdot D - D$
   (c) $A \cdot A^T + 5 \cdot C - E_3$
   (d) $D^T \cdot A$
   (e) $B^2 + 7 \cdot D \cdot C$ (5 Punkte)

4. Bestimme für
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
sowohl im Falle $A \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ als auch für $A \in \mathbb{F}_2^{(2,2)}$ die Potenz A^k für $k \in \mathbb{N}$. (4 Punkte)

5. Zeige oder widerlege:
   (a) Es sei V ein Vektorraum mit $\dim V = n$. Es existieren linear abhängige Vektoren $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_k$ mit $k \leq n$, so dass sich $\vec{v}_k$ nicht als Linearkombination von $\vec{v}_1, \ldots \vec{v}_{k-1}$ darstellen lässt.
   (b) Es seien $m, n, r \in \mathbb{N}$ und K ein Körper. Weiter seien Matrizen $A \in K^{(m,n)}$ und $B, C \in K^{(n,r)}$ gegeben. Aus $A \cdot B = A \cdot C$ folgt $B = C$. (4 Punkte)

6. Es sei
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$
   (a) Führe diese Matrix mittels elementaren Umformungen auf eine Matrix der Form $D_r^{(4,5)}$ zurück.
   (b) Bestimme somit Zeilenrang und Spaltenrang von A. (4 Punkte)