Übungen zur Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Montag, 15. Dezember 2014, vor den Übungen

1. Es sei $\mathbb{R}[x]$ der Vektorraum der Polynome $p(x)$ mit reellen Koeffizienten. Ziel ist die Bestimmung einer Basis $\mathcal{B}$ von $\mathbb{R}[x]$, so dass jeder Basisvektor $p_\lambda \in \mathcal{B}$ mit $\lambda \in \mathbb{N}_0$ eine Lösung der Gleichung $(H_\lambda)\colon p'' - x \cdot p' + \lambda \cdot p = 0$ ist, wobei p' bzw. p'' die jeweiligen Ableitungen des Polynoms p seien.
   (a) Zeige, dass $p_0 = 1$, $p_1 = x$ und $p_2 = x^2 - 1$ die ersten drei Basisvektoren sind.
   (b) Es sei p eine Lösung von (H_λ). Zeige, dass dann $p^* := x \cdot p - p'$ eine Lösung von $(H_{\lambda+1})$ ist.
   (c) Konstruiere Lösungen p_λ von (H_λ), so dass $\{p_\lambda \colon \lambda \in \mathbb{N}_0\}$ eine Basis von $\mathbb{R}[x]$ ist. (6 Punkte)

2. Eine Matrix $A \in K^{(n,n)}$ heißt nilpotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = 0^{(n,n)}$ existiert, bzw. unipotent, falls ein $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k = E_n$ existiert. Zeige:
   (a) Jede unipotente Matrix ist regulär.
   (b) Jede nilpotente Matrix ist singulär.
   (c) Es sei $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dann ist jede reguläre Matrix unipotent. (3 Punkte)

3. Bestimme die Inversen folgender Matrizen über dem jeweiligen Körper:
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{(3,3)}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1-i \\ i & 2 & 1 \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{(3,3)}, \quad C = \begin{pmatrix} t & 1 & t \\ t+1 & 1 & t \\ 1 & 1 & t+1 \end{pmatrix} \in \mathbb{F}_4^{(3,3)}$$
(6 Punkte)

4. Es sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A_n = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ eine Matrix vom Typ (n,n) mit $a_{ij} \in K$, die durch
$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls} \quad i = j, \\ -1, & \text{falls} \quad i = j+1, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$
definiert sind. Zeige, dass $\operatorname{rg}(A_n) = n$ gilt und bestimme A_n^{-1}. (4 Punkte)

5. Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und die Matrizen $A \in K^{(n,n)}$, $B \in K^{(n,m)}$, $C \in K^{(m,n)}$ und $D \in K^{(m,m)}$ gegeben. Weiterhin sei A regulär, und wir setzen $T := D - CA^{-1}B$. Blockmatrizen heißen Matrizen der Form
$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$
   (a) Zeige, dass M genau dann invertierbar ist, wenn T invertierbar ist und bestimme M^{-1}.
   (b) Es sei $K = \mathbb{R}$ sowie
$$N := \begin{pmatrix} E_n & \vec{b} \\ \vec{c}^T & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(n+1,n+1)} \quad \text{mit} \quad \vec{b} = \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$
   Bestimme N^{-1}. (5 Punkte)