Probeklausur zur
Linearen Algebra für Informatiker und Ingenieure

Prof. Dr. Helmut Maier, Dr. Hans- Peter Reck

keine Abgabe

1. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Wir betrachten die Vektoren $\vec{x} = (2, 1, 3)^T$ und $\vec{y} = (-2, 2, -2)^T$.
   (a) Bestimme eine Parameterdarstellung der Geraden, die durch die Punkte $\vec{x}$ und $\vec{y}$ verläuft.
   (b) Die Vektoren $\vec{x}$ und $\vec{y}$ spannen einen Unterraum U von V auf.
   Gib eine parameterfreie Darstellung von U an. (5 Punkte)

2. Begründe, ob es sich bei den gegebenen Mengen und Verknüpfungen um eine Gruppe handelt:
   (a) die ganzen Zahlen mit der gewöhnlichen Subtraktion
   (b) die Menge der Gruppenhomomorphismen $\{\varphi\colon G \to G' \colon \varphi(gh) = \varphi(g)\varphi(h)\}$ einer Gruppe G in eine Gruppe G' mit werteweiser Multiplikation $(\varphi \cdot \psi)(g) = \varphi(g) \cdot \psi(g)$ (6 Punkte)

3. Es sei $k \in \mathbb{Z}$ und $f_k\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $x \to x + k - x \cdot k$ gegeben. Für welche $k \in \mathbb{Z}$ ist die Abbildung f_k
   (a) injektiv?
   (b) surjektiv? (5 Punkte)

4. Bestimme ein Polynom kleinsten Grades mit reellen Koeffizienten, das die Nullstellen 1, 2 und $1 + i$ besitzt, und gib den Koeffizienten des Monoms x^2 an. (5 Punkte)

5. (a) Zeige die lineare Abhängigkeit der Vektoren

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \vec{d} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

   (b) Zeige, dass $\vec{b}$ keine Linearkombination der übrigen drei Vektoren ist. (7 Punkte)

6. Es sei V ein achtdimensionaler Vektorraum und U_1 und U_2 Unterräume von V mit $\dim U_1 = 6$ und $\dim U_2 = 7$. Zeige: $\dim(U_1 \cap U_2) \in \{5, 6\}$. (5 Punkte)

7. (a) Welche der folgenden Abbildungen der gegebenen reellen Vektorräume sind linear?
      i. $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x) = x^3$
      ii. $\varphi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $\varphi(z) = \overline{z} + z$
      iii. $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $\varphi((x_1, x_2)^T) = x_1 + x_2$
   (b) Um welche Morphismusart handelt es sich jeweils? (8 Punkte)

8. Es sei V ein eindimensionaler Vektorraum über K. Zeige, dass eine Abbildung $f\colon V \to V$ genau dann linear ist, wenn es ein $c \in K$ mit $f(\vec{x}) = c \cdot \vec{x}$ für alle $\vec{x} \in V$ gibt. (5 Punkte)

9. Zeige oder widerlege:

   (a) Es seien A, B und C Mengen. Aus $A \cap B = A \cap C$ folgt $B = C$.

   (b) Es seien $A, B \in K^{(n,n)}$ symmetrische Matrizen, d.h. es gilt $A = A^T$ bzw. $B = B^T$. Dann ist AB genau dann symmetrisch, wenn A und B kommutieren. (6 Punkte)

10. Es seien $V := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = \sum_{\nu=0}^{3} a_\nu x^\nu,\ a_\nu \in \mathbb{R}\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens drei mit reellen Koeffizienten und $\varphi \in L(V, V)$ mit $p(x) \to p'(x) + p''(x)$ gegeben.

    (a) Zeige, dass $\mathcal{B} = \{f_\nu\}$ mit $f_\nu : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_\nu(x) := (x+1)^\nu$ für $0 \leq \nu \leq 3$ eine Basis von V ist.

    (b) Es sei $g(x) := (x-2)^2 + x$. Bestimme die Koordinaten von g bzgl. der Basis $\mathcal{B}$.

    (c) Erweitere die Menge $\{g\}$ zu einer Basis $\mathcal{B}'$ von V

    (d) Bestimme $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B})$ und $\mathcal{M}(\varphi; \mathcal{B}, \mathcal{B}')$.

    (e) Ist φ injektiv, surjektiv bzw. bijektiv?

    (f) Es sei $\sigma(\mathcal{B}) = \{2, x+2, (x+1)^2 + (x+2) + 2, (x+1)^3 + (x+1)^2 + 2(x+2) + 4\}$. Bestimme $\mathcal{M}(\varphi; \sigma(\mathcal{B}), \sigma(\mathcal{B}))$. (11 Punkte)

11. (a) Gib eine Definition folgender Begriffe an:

       i. Kern einer Matrix

       ii. Automorphismus

       iii. lineare Mannigfaltigkeit

    (b) Formuliere den Dimensionssatz für Summenräume. (12 Punkte)

12. Es sei $A \in K^{(n,n)}$. Zeige, dass dann folgende Aussagen äquivalent sind:

    (1) Für alle $\vec{b} \in K^n$ besitzt $A\vec{x} = \vec{b}$ mindestens eine Lösung $\vec{x} \in K^n$.

    (2) Die homogene Gleichung $A\vec{x} = \vec{0}$ besitzt nur die triviale Lösung.

    (3) Die Matrix A ist regulär. (8 Punkte)

13. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

    gegeben.

    (a) Berechne $A \cdot A^T$.

    (b) Bestimme die Inverse der Matrix A.

    (c) Bestimme $\mathrm{rg}(A)$ sowie $\dim \mathrm{Kern}(A)$ sowie eine Basis des Bildes und des Kerns von A.

    (d) Es sei $\vec{b} = \vec{e}_1 + 3\vec{e}_2 + \vec{e}_3$. Löse das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$. (9 Punkte)

14. Es sei $K = \mathbb{F}_4$, und wir untersuchen das LGS $A\vec{x} = \vec{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t & t+1 \\ 1 & t+1 & 0 & 1 \\ t+1 & t+1 & 1 & t \end{pmatrix}.$$

    (a) Zeige, dass das LGS weder universell noch eindeutig lösbar ist.

    (b) Gib einen Vektor $\vec{b}$ an, so dass das LGS unlösbar ist. (8 Punkte)

Viel Erfolg!