Übungen zur
Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Donnerstag, 15. Mai 2014, vor den Übungen

1. Die projektive Ebene über dem Körper $K = \mathbb{F}_4$ hat 21 Geraden. Davon wurden 14 in der Vorlesung angegeben. Bestimme die restlichen sieben. (6 Punkte)

2. Es sei $(A, \mathcal{G})$ eine Ebene, in der die Aussage von Aufgabe 4 von Übungsblatt 1 gültig ist, und $g \in \mathcal{G}$ sei eine Gerade mit $\overline{0}, \overline{1} \in g$ und $\overline{0} \neq \overline{1}$. Weiter sei $g' \in \mathcal{G}$ eine Gerade mit $g' \neq g$, so dass $\overline{0} \in g'$ gilt. Es sei $E' \in g'$ und $E' \neq \overline{0}$ sowie z die Parallele zu g durch E'.
   Dann kann g derart zu einem Körper mit Nullelement $\overline{0}$ und Einselement $\overline{1}$ gemacht werden:

   - Addition:
     Für $a, b \in g$ sei $l(a)$ die Gerade durch a und E', $p(b)$ die Parallele zu g' durch b, c der Schnittpunkt von $p(b)$ und z und $q(a, b)$ die Parallele zu $l(a)$ durch c.
     Dann ist $a + b$ als Schnittpunkt von $q(a, b)$ mit g definiert.
   - Multiplikation:
     Es sei y die Gerade durch $\overline{1}$ und E', $r(b)$ die Parallele zu y durch b, b' der Schnittpunkt von $r(b)$ mit g' und $s(a, b)$ die Parallele zu $l(a)$ durch b'.
     Dann ist $a \cdot b$ als Schnittpunkt von $s(a, b)$ mit g definiert.

   Führe den Beweis für folgende Körperaxiome durch:

   (a) die Kommutativität von Addition und Multiplikation

   (b) die Existenz des Negativen, d.h. für alle $a \in g$ existiert ein $-a \in g$ mit $a + (-a) = \overline{0}$.

   (c) die Existenz des multiplikativen Inversen, d.h. es existiert ein $a^{-1} \in g$ mit $a \cdot a^{-1} = \overline{1}$ für alle $a \in g \backslash \{\overline{0}\}$..

   Hinweis:
   Wende die Inzidenzaxiome der Geometrie und einen zu Aufgabe 4 von Übungsblatt 1 vergleichbaren Satz an.

   (8 Punkte)

3. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Aussage
   $$\sum_{d|n} \mu(d)\tau(n/d) = 1$$
   gilt. (4 Punkte)

4. (a) Es seien die Funktionen F und G seien auf $[1, \infty)$ definiert. Zeige, dass folgende Beziehungen äquivalent sind:

   i. $F(x) = \sum_{n \leq x} G\left(\frac{x}{n}\right)$ für $x \geq 1$

   ii. $G(x) = \sum_{n \leq x} \mu(n) F\left(\frac{x}{n}\right)$ für $x \geq 1$

   (b) Zeige, dass die Summe $m(x) = \sum_{n \leq x} \frac{\mu(n)}{n}$ als Funktion von x beschränkt ist.

   Hinweis:

   Wende Teilaufgabe a) mit $G = 1$ an. (6 Punkte)