Übungen zu den
Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Donnerstag, 22. Mai 2014, vor den Übungen

1. Unter einem Schiefkörper S versteht man einen Ring, für den $S\backslash\{0\}$ eine Gruppe bzgl. der Multiplikation bildet. Ein Schiefkörper erfüllt also alle Körperaxiome mit möglicher Ausnahme der Kommutativität der Multiplikation.

   (a) Es sei S ein Schiefkörper und $\mathbb{A} = S^2$. Eine Gerade $g \in \mathbb{A}$ ist durch $g = \{\vec{v}_0 + t\vec{c}\colon t \in S\}$ mit $\vec{v}_0 \in \mathbb{A}$ und $\vec{c} \in \mathbb{A}\backslash\{\vec{0}\}$ definiert. Die Menge aller Geraden sei $\mathcal{G}$.
   Zeige, dass $(\mathbb{A}, \mathcal{G})$ eine affine Ebene ist.

   Hinweis:
   Verwende die aus der Linearen Algebra bekannte Methode der Lösung von Linearen Gleichungssystemen. Fast alle Überlegungen können direkt übertragen werden. Das Fehlen der Kommutativität der Multiplikation führt zu einer (kleinen) Komplikation.

   (b) Es sei $\mathbb{H} = \{\alpha\mathcal{E} + \gamma\mathcal{J} : \alpha, \gamma \in \mathbb{C}\}$ mit

   $$\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathcal{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Die Multiplikation auf $\mathbb{H}$ sei mittels der Matrixmultiplikation definiert.
   Ist $z = \alpha\mathcal{E} + \gamma\mathcal{J}$ mit $\alpha = a + bi$ und $\gamma = c + di$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ so schreiben wir dann auch $z = a + bi + cj + dk$.
   Insbesondere setzen wir $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ sowie $ij = k$. Es sei $\overline{z} = a - bi - cj - dk$.
   Zeige, dass $z\overline{z} \geq 0$ gilt und dass genau dann $z\overline{z} = 0$ gilt, wenn $z = 0$ ist.
   Zeige, dass $\mathbb{H}$ ein Schiefkörper, aber kein Körper ist.

   (c) Es sei $(\mathbb{A}, \mathcal{G})$ die in Teilaufgabe a) konstruierte affine Ebene, wobei der Schiefkörper $S = \mathbb{H}$ gewählt wird. Die sechs Geraden l_i für $1 \leq i \leq 6$ seien wir folgt definiert:

   - l_1 die Gerade durch $(0, 1)$ und $(i, 0)$
   - l_2 die Parallele zu l_1 durch $(0, j)$
   - l_3 die Gerade durch $(0, 1)$ und $(j, 0)$
   - l_4 die Parallele zu l_3 durch $(0, i)$
   - l_5 die Gerade durch $(i, 0)$ und $(0, i)$
   - l_6 die Gerade durch $(j, 0)$ und $(0, j)$.

   Zeige unter Verwendung der Geraden $l_1, \ldots, l_6$, dass der Satz von Pappos- Pascal (Aufgabe 4 von Übungsblatt 1) in $(\mathbb{A}, \mathcal{G})$ nicht gilt. (12 Punkte)

2. Es sei $f_0(x) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]$ durch $f_0(x) = x^3 + x^2 - 1$ definiert.

   (a) Zeige, dass der Restklassenring $K = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})[x]/(f_0)$ einen Körper darstellt.

   (b) Bestimme die Anzahl der Elemente von K.

   (c) Es sei $t = x + (f_0)$ und $\gamma = 1 - t + t^2$.
   Drücke γ^{-1} in der Form $\gamma^{-1} = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ mit $a_i \in \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ aus. (6 Punkte)

3. Es sei $K = \mathbb{F}_4$ der in Beispiel 1.3.3 definierte Körper mit vier Elementen.
   Finde ein Polynom $f_0 \in K[x]$, so dass der Restklassenring $K[x]/(f_0)$ ein Körper mit 64 Elementen ist. (6 Punkte)