Übungen zu den
Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 10. Juni 2014, vor den Übungen

1. Die zahlentheoretische Funktion Λ sei durch

$$\Lambda(n) := \begin{cases} \log p & \text{für } n = p^m \text{ mit } p \in \mathbb{P} \text{ und } m \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

definiert. Es sei $\psi(x) := \sum_{n \leq x} \Lambda(n)$ bzw. $T(x) := \sum_{n \leq x} \log n$.
Zeige:

   (a) $\log n = \sum_{d|n} \Lambda(d)$.

   (b) $T(x) = \sum_{r \leq x} \psi\left(\frac{x}{r}\right)$

   (c) Die Asymptotik $\psi(x) = x \cdot (1 + o(1))$ ist zum Primzahlsatz äquivalent. (6 Punkte)

2. Zeige, dass aus $(*)$ $\lim_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{x/\log x} = a$ bereits $a = 1$ folgt.

   Hinweis:
   Leite aus $(*)$ eine Asymptotik für $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p}$ her. (6 Punkte)

3. Zeige:

   (a) Aus $\sum_{p \leq x} \frac{\log p}{p} = \log x + a + o(1)$ für $a \in \mathbb{R}$ folgt der Primzahlsatz.

   (b) Aus $\sum_{p \leq x} \frac{1}{p} = \log \log x + b + o\left(\frac{1}{\log x}\right)$ für $b \in \mathbb{R}$ folgt der Primzahlsatz. (6 Punkte)

4. Zwei Designs $D_i(v, b, r, k, 1) = (D_i, \mathcal{B}_i)$ mit $i = 1, 2$ mit denselben Parametern heißen isomorph, wenn es eine bijektive Abbildung $\Phi\colon D_1 \to D_2$, welche ein Isomorphismus genannt wird, gibt, so dass $\Phi(B) \in \mathcal{B}_2$ für alle $B \in \mathcal{B}_1$ gilt. Falls $(D_1, \mathcal{B}_1) = (D_2, \mathcal{B}_2)$ gilt, heißt Φ ein Automorphismus des Designs $(D_1, \mathcal{B}_1)$. Zeige:

   (a) Mit Φ ist auch die Umkehrabbildung Φ^{-1} ein Isomorphismus.

   (b) Die Menge der Automorphismen eines Designs $D = D(v, b, r, k, 1)$ bilden eine Gruppe bzgl. der Komposition von Abbildungen, die Automorphismengruppe $\mathrm{Aut}(D)$.
   Bestimme $|\mathrm{Aut}(\mathbb{P}_2)|$, wobei $\mathbb{P}_2$ die projektive Ebene der Ordnung 2 bedeutet.

   (c) Es seien $(\mathbb{P}_1, \mathcal{G}_1)$ und $(\mathbb{P}_2, \mathcal{G}_2)$ projektive Ebenen sowie $g_1 \in \mathcal{G}_1$ und $g_2 \in \mathcal{G}_2$. Es sei $\Phi\colon \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ ein Isomorphismus mit $\Phi(g_1) = g_2$. Die zugehörogen affinen Ebenen $(\mathbb{E}_i, \mathcal{G}'_i)$ mit $i = 1, 2$ seien durch $\mathbb{E}_i = \mathbb{P}_i - g_i$ und $\mathcal{G}' = \mathcal{G} - \{g_i\}$ gegeben.
   Dann ist die Restriktion $\Phi_{|_{\mathbb{E}_1}}$ ein Isomorphismus von $(\mathbb{E}_1, \mathcal{G}'_1)$ auf $(\mathbb{E}_2, \mathcal{G}'_2)$. (6 Punkte)