

Übungen zu den Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte

Abgabe: Dienstag, 24. Juni 2014, vor den Übungen

Aufgabe 3:

1. Es sei $D \in \mathbb{N}$, und eine geeignete Gewichtsfunktion $\rho(d)$ sei für alle $d|D$ definiert. Zeige:

(a) Es gilt

$$\sum_{d|D} \rho(d) T\left(\frac{x}{d}\right) = (x \log x - x) \cdot \left(\sum_{d|D} \frac{\rho(d)}{d} \right) - x \left(\sum_{d|D} \frac{\rho(d)}{d} \log d \right) + O(\log x).$$

(b) Es gilt

$$\sum_{d|D} \rho(d) T\left(\frac{x}{d}\right) = \sum_{r \leq x} c_r \cdot \psi\left(\frac{x}{r}\right),$$

wobei der Koeffizient c_r nur von der Restklasse von $r \bmod D$ abhängt.

(c) Betrachte den Spezialfall $D = 30$, $\nu(1) = 1$, $\nu(2) = \nu(3) = \nu(5) = -1$, $\nu(30) = 1$ und $\nu(d) = 0$ für alle anderen $d|30$ und zeige, dass die Vorzeichen der von null verschiedenen c_r alternieren.

(d) Beweise mittel Teil c)

$$\begin{aligned} \psi(x) &\geq ax \cdot (1 + o(1)) \quad \text{und} \\ \psi(x) - \psi\left(\frac{x}{6}\right) &\leq (a + o(1)) \cdot x - \psi\left(\frac{x}{7}\right) + \psi\left(\frac{x}{10}\right). \end{aligned}$$