# Übungen zu den
# Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Dienstag, 8. Juli 2014, vor den Übungen

1. Es mögen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{A}_m$ die Bedeutung von Abschnitt 3.2 haben. Es sei $Q(\mathcal{A})$ die Anzahl der quadratfreien Zahlen in $\mathcal{A}$

   (a) Zeige:
   $$Q(\mathcal{A}) = \sum_{d=1}^{\infty} \mu(d)|\mathcal{A}_{d^2}|.$$
   Es sei $\epsilon > 0$ und $\frac{1}{3} + \epsilon < \theta \leq \frac{2}{5}$ sowie $x \geq 1$. Weiter sei $\mathcal{A} = \mathcal{A}(x,\theta) = \{n \in \mathbb{N} \colon x - x^\theta < n \leq x\}$. Es sei $q(x) = Q(\mathcal{A}(x,\theta))$ und $c = \sum_{d=1}^{\infty} \frac{\mu(d)}{d^2}$.
   Zeige nun, dass ein $x_0 = x_0(\epsilon)$ existiert, so dass für $x \geq x_0$ die Aussagen b) bis d) gelten:

   (b)
   $$\sum_{d \leq x^{\theta - \epsilon/2}} \mu(d)|\mathcal{A}_{d^2}| = c \cdot x^\theta + O\left(x^{\theta - \epsilon/2}\right).$$

   (c) Zu gegebenem $l \leq x^{1/3}$ gibt es höchstens ein $d$, so dass $d^2 l \in \mathcal{A}$ gilt.

   (d)
   $$\left| \sum_{d \geq x^{\theta - \epsilon/2}} \mu(d)|\mathcal{A}_{d^2}| \right| \leq x^{1/3}.$$

   (e) Zeige nun $q(x) = c \cdot x^\theta \cdot (1 + o(1))$. (8 Punkte)

2. Zeige:

   (a) Es gilt
   $$\sum_{n \leq x} \nu(n) = x \log\log x + O(x).$$

   (b) Es gilt
   $$\sum_{n \leq x} \nu(n)^2 = \sum_{\substack{p_1 \leq x^{1/4} \\ p_1 \in \mathbb{P}}} \sum_{\substack{p_2 \leq x^{1/4} \\ p_2 \in \mathbb{P}}} \frac{x}{p_1 p_2} + O(x \log\log x).$$

   (c) Es gilt
   $$\sum_{n \leq x} (\nu(n) - \log\log x)^2 = O(x \log\log x).$$

   (d) Es gibt eine absolute Konstante $c_0 > 0$, so dass für alle $C \geq 1$ folgendes gilt:
   Es gibt ein $x_0 = x_0(C) \geq 3$, so dass für $x \geq x_0$ nun
   $$\left| \{ n \leq x \colon |\nu(n) - \log\log n| \geq C \cdot (\log\log n)^{1/2} \} \right| \leq c_0 \cdot \frac{x}{C^2}$$
   gilt. (8 Punkte)

3. Die klassische Definition der Wahrscheinlichkeit nach Laplace ist die folgende:
*Es sei eine endliche Menge $\Omega$ gegeben. Unter einem Ereignis $E$ versteht man eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$. Unter der Wahrscheinlichkeit $P(E)$ des Ereignisses $E$ versteht man $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|}$.*
*Ereignisse $E_1, \ldots, E_m$ von $\Omega$ heißen unabhängig, wenn für $\{j_1, \ldots, j_l\} \subseteq \{1, \ldots, m\}$ die Aussage*

$$P(E_{j_1} \cap \ldots \cap E_{j_l}) = \prod_{h=1}^{l} P(E_{j_h})$$

*gilt.*

(a) Es sei $D = p_1 \cdots p_r$ mit $p_1 < \ldots < p_r$ Primzahlen sowie $k \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \{1, \ldots, kD\}$. Für jedes $p_i$ mit $1 \leq i \leq r$ sei eine Menge $\mathcal{R}_i = \{n_1^{(i)}, \ldots, n_{\omega(p_i)}^{(i)}\}$ von $\omega(p_i)$ ganzen Zahlen vorgegeben, die paarweise inkongruent modulo $p_i$ sind.
Das Ereignis $E_i$ sei durch $E_i = \{n \in \Omega \colon n \not\equiv n_i \bmod p_i,\ \forall n_i \in \mathcal{R}_i\}$ gegeben.
Zeige, dass die $E_i$ mit $1 \leq i \leq r$ unabhängige Ereignisse sind und dass insbesondere

$$P(E_1 \cap \ldots \cap E_r) = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{\omega(p_i)}{p_i}\right)$$

gilt.

(b) Es sei $N \in \mathbb{N}$ und $\Omega = \{1, \ldots, N\}$. Für jede Primzahl $p \leq (\log N)^2$ sei $E(p) = \{n \leq x \colon p | n\}$. Zeige, dass ein $N_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für $N \geq N_0$ die Ereignisse $E(p)$ nicht unabhängig sind. (8 Punkte)