



Probeklausur zu den Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 100 Punkte

1. Von den sieben Blöcken eines Designs $D(7, 7, 4, 4, 2)$ sind die vier Blöcke $\mathcal{B}_1 = \{1, 2, 3, 6\}$, $\mathcal{B}_2 = \{1, 2, 5, 7\}$, $\mathcal{B}_3 = \{1, 3, 4, 5\}$ und $\mathcal{B}_4 = \{1, 4, 6, 7\}$ bekannt. Bestimme die restlichen drei Blöcke mit Beschreibung des Lösungsweges. (9 Punkte)
2. Projektive und affine Ebenen der Ordnung n bilden Designs. Gib ihre Parameter an. (8 Punkte)
3. Gib Definitionen für
 - (a) clearset
 - (b) group divisible design
 - (c) auflösbares Design mit r Replikationenan. (15 Punkte)
4. Es sei p eine Primzahl, $n \in \mathbb{N}$ und $q = p^n$. Beschreibe die Konstruktion eines Körpers K mit $|K| = q$. (12 Punkte)
5. Formuliere und beweise den Satz von Mc Neish. (12 Punkte)
6. Was versteht man unter einem orthogonalen Schema $OS(n, s)$ von der Ordnung n und der Tiefe s ?
Die Existenz von k orthogonalen Lateinischen Quadraten der Ordnung n ist äquivalent zur Existenz eines OS. Was sind Ordnung und Tiefe des OS? Beweise die Äquivalenz. (12 Punkte)
7. Wie lauten das Einschluss- Ausschluss- Prinzip und die Einschluss- Ausschluss- Ungleichung? (9 Punkte)
8. Durch welche Ungleichungen wird die im Sieb des Erathosthenes verwendete Gleichung

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Reinen Brunschen Sieb ersetzt? (10 Punkte)

9. Es sei \mathcal{A} eine endliche Folge natürlicher Zahlen, $\mathcal{A}_d = \{n \in \mathcal{A} : d|n\}$ und \mathcal{P} eine Menge von Primzahlen.

Für $p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}$, $\mu^2(d) = 1$ und die multiplikative Funktion ω und $X \geq 1$ sei

$$|\mathcal{A}_d| = X \cdot \frac{\omega(d)}{d} + R_d.$$

- (a) Wie lässt sich $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ im Sieb des Erathosthenes durch die $|\mathcal{A}_d|$ ausdrücken?
(b) Es sei

$$W(z) = \prod_{p < z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right).$$

Welchen Ausdruck erhält man, wenn man $|\mathcal{A}_d|$ in der Formel für $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$ in der Teilaufgabe a) durch die Näherung $X \cdot \frac{\omega(d)}{d}$ ersetzt?

(13 Punkte)

Viel Erfolg!