



## Probeklausur zu den Anwendungen der Zahlentheorie in der Kombinatorik

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 100 Punkte

1. Von den sieben Blöcken eines Designs  $D(7, 7, 4, 4, 2)$  sind die vier Blöcke  $\mathcal{B}_1 = \{1, 2, 3, 6\}$ ,  $\mathcal{B}_2 = \{1, 2, 5, 7\}$ ,  $\mathcal{B}_3 = \{1, 3, 4, 5\}$  und  $\mathcal{B}_4 = \{1, 4, 6, 7\}$  bekannt. Bestimme die restlichen drei Blöcke mit Beschreibung des Lösungsweges. (9 Punkte)
2. Projektive und affine Ebenen der Ordnung  $n$  bilden Designs. Gib ihre Parameter an. (8 Punkte)
3. Gib Definitionen für
  - (a) clearset
  - (b) group divisible design
  - (c) auflösbares Design mit  $r$  Replikationenan. (15 Punkte)
4. Es sei  $p$  eine Primzahl,  $n \in \mathbb{N}$  und  $q = p^n$ . Beschreibe die Konstruktion eines Körpers  $K$  mit  $|K| = q$ . (12 Punkte)
5. Formuliere und beweise den Satz von Mc Neish. (12 Punkte)
6. Was versteht man unter einem orthogonalen Schema  $OS(n, s)$  von der Ordnung  $n$  und der Tiefe  $s$ ?  
Die Existenz von  $k$  orthogonalen Lateinischen Quadraten der Ordnung  $n$  ist äquivalent zur Existenz eines OS. Was sind Ordnung und Tiefe des OS? Beweise die Äquivalenz. (12 Punkte)
7. Wie lauten das Einschluss- Ausschluss- Prinzip und die Einschluss- Ausschluss- Ungleichung? (9 Punkte)
8. Durch welche Ungleichungen wird die im Sieb des Erathosthenes verwendete Gleichung

$$\sum_{d|n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

im Reinen Brunschen Sieb ersetzt? (10 Punkte)

9. Es sei  $\mathcal{A}$  eine endliche Folge natürlicher Zahlen,  $\mathcal{A}_d = \{n \in \mathcal{A} : d|n\}$  und  $\mathcal{P}$  eine Menge von Primzahlen.

Für  $p|d \Rightarrow p \in \mathcal{P}$ ,  $\mu^2(d) = 1$  und die multiplikative Funktion  $\omega$  und  $X \geq 1$  sei

$$|\mathcal{A}_d| = X \cdot \frac{\omega(d)}{d} + R_d.$$

- (a) Wie lässt sich  $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$  im Sieb des Erathosthenes durch die  $|\mathcal{A}_d|$  ausdrücken?  
(b) Es sei

$$W(z) = \prod_{p < z} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p}\right).$$

Welchen Ausdruck erhält man, wenn man  $|\mathcal{A}_d|$  in der Formel für  $S(\mathcal{A}, \mathcal{P}, z)$  in der Teilaufgabe a) durch die Näherung  $X \cdot \frac{\omega(d)}{d}$  ersetzt?

(13 Punkte)

**Viel Erfolg!**