Übungen zur Analytischen Zahlentheorie

Prof. Dr. Helmut Maier, Hans- Peter Reck

Gesamtpunktzahl: 24 Punkte
Abgabe: Donnerstag, 24. Oktober 2013, vor den Übungen

1. Zeige, dass alle stetigen Charaktere der Gruppe $(\mathbb{R}, +)$ von der Form

$$e_\nu \colon \mathbb{R} \to \mathbb{C}^*, \; e_\nu(t) = e(\nu t)$$

mit $\nu \in \mathbb{R}$ sind.
Wir zeigen dies, indem wir nachweisen, dass diese Charaktergruppe $(C, \circ)$ zu $(\mathbb{R}, +)$ isomorph ist.
Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir betrachten dazu die Abbildung $\Phi \colon \mathbb{R} \to C$, $\alpha \to \chi_\alpha$ mit $\chi_\alpha \colon x \to e^{i\alpha x}$.
Dabei ist χ_α wegen der Stetigkeit und der Relationstreue auch tatsächlich ein Charakter.
Insbesondere sei χ_0 der Hauptcharakter.

   (a) Zeige, dass die Abbildung Φ injektiv ist.

   (b) Es bleibt noch, die Surjektivität von Φ zu zeigen.

      i. Es sei χ ein beliebiger Charakter von $(\mathbb{R}, +)$ und $\beta \in \mathbb{R}$.
      Zeige, dass ein $\beta > 0$ mit $\chi(\beta) = 1$ existiert.

      ii. Es sei $\chi \neq \chi_0$. Zeige, dass dann ein minimales derartiges β existiert.

      iii. Zeige nun die Behauptung. (14 Punkte)

2. Zeige, dass alle stetigen Charaktere χ von $\mathbb{C}^*$ durch $\chi(z) = z^m$ mit $m \in \mathbb{Z}$ gegeben sind.

   Hinweis:
   Benutze dazu Aufgabe 1. (6 Punkte)

3. Gib eine Liste sämtlicher Charaktere von $(\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}, \cdot)^*$ mit ihren Werten an. (4 Punkte)