Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
29.04.2014
Blatt 1

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 06.05.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $\mathcal{M} := \{(x, ax+b) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Zeige, dass $\mathcal{M}$ genau dann ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist, wenn $b = 0$ ist.

   (b) Zeige, dass $\mathcal{U} := \{(x, ax) \in \mathbb{R}^2 : a = \pm 1, x \in \mathbb{R}\}$ kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^2$ ist.

   Dabei soll die übliche Addition und skalare Multiplikation im $\mathbb{R}^2$ verwendet werden.

   (3 + 2 Punkte)

2. Es sei V ein K-Vektorraum und $U_1, U_2 \subset V$ seien Untervektorräume.

   (a) Zeige, dass dann $U_1 \cap U_2$ ein Untervektorraum von V ist.

   (b) Widerlege durch ein Gegenbeispiel, dass $U_1 \cup U_2$ ein Untervektorraum ist. Gib also V, U_1 und U_2 an, so dass $U_1 \cup U_2$ kein Untervektorraum ist (und begründe dies).

   (2 + 2 Punkte)

3. Es sei V ein K-Vektorraum und $T \subset V$. Zeige, dass dann die lineare Hülle $\mathcal{L}(T)$ von T ein Untervektorraum von V ist.

   (2 Punkte)

4. Betrachten wir die Menge der reellen Potenzreihen mit Konvergenzradius $R = \infty$:

$$P := \left\{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \exists (a_k)_{k \in \mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k < \infty \text{ für alle } x \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) Zeige, dass es sich bei P um einen $\mathbb{R}$-Vektorraum handelt (zusammen mit der üblichen, punktweisen Addition und skalaren Multiplikation von Funktionen). Gib insbesondere das neutrale Element explizit an.

   (b) Betrachte die Familie $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_0} \subset P$ mit $f_j(x) := x^j$. Ist die Familie linear unabhängig? Falls ja, handelt es sich um eine Basis für P? Begründe Deine Antworten.

   (c) Es sei $f \in P$ mit $f(x) := 3x^2 + 2x + 1$.

   - Zeige, dass f, f' und f'' linear unabhängig sind.
   - Zeige, dass das nicht für alle $f \in P$ gilt.

   (3 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

5. Gegeben sind die folgenden Vektoren:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass es sich um ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ handelt, das keine Basis ist.

(b) Wähle eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus den Vektoren aus.

(c) Gib für alle nicht in der zuvor gewählten Basis enthaltenen Vektoren an, mit welchen Vektoren der Basis sie ausgetauscht werden können.

(3 + 2 + 2 Punkte)

Je zwei Studierende sollten gemeinsam eine Lösung abgeben. Bei Abweichungen von ± 1 (Abgabe alleine oder zu dritt) wird ein Punkt abgezogen, bei größeren Abweichungen alle Punkte. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.