Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
13.05.2014
Blatt 3

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 20.05.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Es seien V und W je ein K-Vektorraum und $f \in L(V, W)$. Zeige, dass dann $\operatorname{Kern}(f)$ ein Untervektorraum von V ist.

(3 Punkte)

2. Wir betrachten die Permutation $\pi\colon \{1, \dots, 5\}$, die durch $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{smallmatrix}\right)$ gegeben ist. Bestimme zwei verschiedene Darstellungen $\pi = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_m$ mit Transpositionen $\tau_1, \dots, \tau_m$ und berechne $\operatorname{sgn} \pi$.

(3 Punkte)

3. Es sei $\tau \in S_n$ und $\varphi\colon S_n \to S_n$ mit $\varphi(\sigma) := \tau \circ \sigma$. Zeige, dass φ bijektiv ist und bestimme die inverse Abbildung φ^{-1}.

(3 Punkte)

4. Es sei $\tau \in S_n$ eine Transposition. Zeige, dass dann $\operatorname{sgn} \tau = -1$ gilt.

(3 Punkte)

5. Es sei

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 & -6 \\ 4 & -5 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & -7 \\ 9 & -1 & -5 & 4 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechne die Determinante von A mit dem Verfahren nach Laplace.
   (b) Überprüfe Dein Ergebnis aus (a), indem Du $\det(A)$ mit Hilfe des Gauß-Algorithmus berechnest (bringe A auf obere Dreiecksform).
   (c) Zeige, dass ein zur Sarrus-Regel analoges Verfahren hier zum falschen Ergebnis führt.
   (d) Löse das Gleichungssystem $\tilde{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ mit der Cramerschen Regel, wobei $\boldsymbol{b} := (12, -1, -3)$ und

$$\tilde{A} := \begin{pmatrix} -1 & 7 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   gilt.

(3 + 3 + 1 + 3 Punkte)

6. Seien $a, b, c, d, x \in \mathbb{R}$, so dass die Matrix A mit

$$A := \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix}$$

   invertierbar ist. Bestimme A^{-1} mit Hilfe der Determinante (Prop. 1.6). (3 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=54774