Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
20.05.2014
Blatt 4

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 27.05.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Es sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $f\colon V \times V \to \mathbb{R}$. Für alle $x \in V$ gelte $f(x,x) \geq 0$. Außerdem erfüllt f die Punkte (S2), (S3) und (S4) aus der Definition eines Skalarprodukts. Zeige, dass dann

$$f(x,x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) = 0 \text{ für alle } y \in V$$

gilt.

Hinweis: Eventuell ist ein ähnlicher Ansatz wie im Beweis des Satzes von Cauchy-Schwarz hilfreich.

(3 Punkte)

2. Es sei $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle_M \colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ist durch

$$\langle x, y \rangle_M := x^\top M y$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Wir betrachten die beiden Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B := \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Handelt es sich bei $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ um ein Skalarprodukt?

(b) Handelt es sich bei $\langle \cdot, \cdot \rangle_B$ um ein Skalarprodukt?

(c) Es sei $\langle \cdot, \cdot \rangle_F \colon C[0,1] \times C[0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$\langle f, g \rangle_F := \int_0^1 f(x) g(1-x) \, \mathrm{d}x$$

für alle $f, g \in C[0,1]$. Handelt es sich bei $\langle \cdot, \cdot \rangle_F$ um ein Skalarprodukt?

Begründe Deine Antworten.

(2 + 3 + 2 Punkte)

3. Wir betrachten erneut die Basis $\mathbb{B} = (b_1, b_2, b_3)$ des $\mathbb{R}^3$ von Blatt 2, genauer

$$b_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Orthonormalisiere $\mathbb{B}$ mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens in der Reihenfolge b_1, b_2, b_3.

(b) Orthonormalisiere $\mathbb{B}$ mittels des Gram-Schmidt-Verfahrens in der Reihenfolge b_3, b_2, b_1.

(2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Bestimme, welche Arten von Definitheit die folgenden Matrizen erfüllen.

   (a) $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

   (b) $B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

   (c) $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

   (d) $D := \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2\times 2}$

   Begründe Deine Antworten.

(1 + 1 + 2 + 2 Punkte)

5. Es sei $A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch.

   (a) Zeige, dass $\lambda_k \in \mathbb{R}$ für alle k gilt.

   (b) Zeige, dass A genau dann positiv definit ist, wenn $\lambda_k > 0$ und genau dann negativ definit, wenn $\lambda_k < 0$ für alle $k \in \{1, \dots, n\}$ gilt.

(1 + 2 Punkte)

6. Bestimme zwei Matrizen $A, B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$, so dass

   (a) A hermitesch aber nicht unitär und

   (b) B unitär aber nicht hermitesch ist

   und zeige, dass sie jeweils die gewünschte Eigenschaft besitzen.

(1 + 1 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=54774