Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
27.05.2014
Blatt 5

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 03.06.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Es sei $\alpha \neq 0$. Betrachte die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $f(A) := \left(\begin{smallmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) A$.
   (a) Bestimme einen Eigenwert von f mit dazugehörigem Eigenvektor.
   (b) Zeige, dass es sich bei dem in (a) gefundenen Eigenwert um den einzigen Eigenwert der Abbildung handelt.

(2 + 2 Punkte)

2. Bestimme alle Eigenwerte der folgenden Abbildungen sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten.
   (a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$ und $A = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   (b) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$ und $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 4 & 8 & 10 \\ -3 & -3 & -5 \end{pmatrix}$. *Hinweis*: 4 ist ein EW.
   (c) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit $f(x) = Ax$ und $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. *Hinweis*: 2 ist ein EW.
   (d) $f\colon P_2 \to P_2$ mit $f(p) := p'$ und $P_2 := \{p\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \exists a, b, c \in \mathbb{R} \text{ mit } p(x) = ax^2 + bx + c\}$

(2 + 3 + 3 + 3 Punkte)

3. Betrachte die folgenden Matrizen A. Falls A diagonalisierbar ist, gib die Matrizen S und die Diagonalmatrix D an, so dass $SAS^{-1} = D$ gilt. Falls A nicht diagonalisierbar ist, gib eine unitäre Matrix U und eine obere Dreiecksmatrix D an, so dass $U^*AU = D$ gilt.
   (a) A aus Aufgabe 2(c).
   (b) A aus Aufgabe 2(b).

(3 + 3 Punkte)

4. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und $P_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \lambda^k$ das zugehörige charakteristische Polynom. Zeige, dass A genau dann invertierbar ist, wenn $\alpha_0 \neq 0$ gilt.

(1 Punkt)

5. Es sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit $A := \begin{pmatrix} 1 & 4 & -6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$. Bestimme A^{-1} mithilfe des Satzes von Cayleigh-Hamilton.

(3 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.

https://www.uni-ulm.de/?id=54774