Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
03.06.2014
Blatt 6

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 10.06.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermitesch.
   (a) Sei A positiv definit. Zeige, dass A invertierbar ist und dass A^{-1} ebenfalls positiv definit ist.
   (b) Zeige für $n = 2$ durch ein Gegenbeispiel, dass die Aussage aus (a) im Allgemeinen nicht gilt, wenn man „positiv definit“ durch „positiv semidefinit“ ersetzt.
   (c) Sei A positiv semidefinit. Zeige, dass dann eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ existiert, die ebenfalls positiv semidefinit ist, so dass $B^2 = A$ gilt.
   (d) Zeige für $n = 2$, dass die Aussage aus (c) im Allgemeinen nicht gilt, wenn man „positiv semidefinit“ durch „negativ semidefinit“ oder durch „indefinit“ ersetzt.

(3 + 2 + 3 + 2 Punkte)

2. In Aufgabe 3(a) auf Blatt 5 wurde gezeigt, dass die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & -5 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
diagonalisierbar ist. Ist sie auch unitär diagonalisierbar? Begründe Deine Antwort.

(2 Punkte)

3. Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit
$$A := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5\sqrt{2} \\ 0 & 6 & 0 \\ 5\sqrt{2} & 0 & -4 \end{pmatrix}, \quad B := \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 7 & 3\sqrt{3} \\ 3\sqrt{3} & 13 \end{pmatrix}.$$
   (a) Führe die Hauptachsentransformation von A durch. Bestimme also eine orthogonale Matrix U_A und eine Diagonalmatrix D_A mit $U_A, D_A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$, so dass $A = U_A D_A U_A^*$ gilt.
   Hinweis: Die Matrix A besitzt die Eigenwerte 2 und -3.
   (b) Führe die Hauptachsentransformation von B durch. Bestimme also eine orthogonale Matrix U_B und eine Diagonalmatrix D_B mit $U_B, D_B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, so dass $A = U_B D_B U_B^*$ gilt.
   (c) Skizziere die Mengen $\mathcal{M}_1 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top B x = 1\}$ und $\mathcal{M}_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x^\top D_B x = 1\}$.

(3 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Untersuche die folgenden Matrizen auf Definitheit. Verwende, soweit möglich, das Hauptminorenkriterium.

   (a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & -10 \end{pmatrix}$

   (b) $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

   (c) $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   (d) $D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$

(2 + 1 + 2 + 1 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.