Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
10.06.2014
Blatt 7

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 13.06.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Zwei Normen $\|\cdot\|_a$ und $\|\cdot\|_b$ des $\mathbb{R}^n$ heißen *äquivalent*, wenn Konstanten $c_1, c_2 > 0$ existieren, so dass

$$c_1\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq c_2\|x\|_a$$

für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt.

(a) Zeige, dass $\|\cdot\|_\infty$ und $\|\cdot\|_2$ äquivalent sind.

(b) Seien $p \geq q \geq 1$. Zeige, dass $\|\cdot\|_p$ und $\|\cdot\|_q$ äquivalent sind.

(3 + 3 Punkte)

2. Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$M := \left\{(x, y) \in [-\pi, \pi]^2 \mid x \neq 0, y \neq 0\right\} \cup \{(0, 0)\}$$

und seien $f\colon M \to \mathbb{R}$ und $g\colon M \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = y = 0 \\ \frac{\sin(x)}{y} & \text{sonst} \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x,y) := \begin{pmatrix} \sin(x^2+y^2) \\ \cos(xy) \end{pmatrix}.$$

(a) Zeige, dass $x_0 := (0, 0)$ ein Häufungspunkt von M ist.

(b) Ist f oder g stetig in x_0 (oder sind es beide)?

(c) Ist f oder g beschränkt (oder sind es beide)?

Begründe jeweils Deine Antworten.

(1 + 2 + 2 Punkte)

3. Es sei $x_0 := \left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$. Wir betrachten f und g aus Aufgabe 2.

(a) Bestimme $\nabla f(x_0)$, falls der Gradient existiert.

(b) Bestimme $g'(x_0)$, falls die Jacobi-Matrix existiert.

(c) Es seien $n, m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $f_A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ mit $f(x) = Ax$ und $x_0 := (1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^m$. Bestimme $f_A'(x_0)$, falls die Jacobi-Matrix existiert.

Begründe Deine Antworten, insbesondere falls Gradient oder Jacobi-Matrix nicht existieren.

(2 + 2 + 2 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Berechne folgende Integrale, sofern sie existieren. Begründe andernfalls, weshalb sie nicht existieren.

   (a) $\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ mit $M = [0,1]^3$ und $f(x,y,z) = x^3 + xy^2 + xyz$
   (b) $\int_M f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z)$ mit $M = [0,1]^3$ und $f(x,y,z) = \left(x^3 + y^2\right)z^{-1}$
   (c) $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ mit $M = [1,2] \times [0,\pi]$ und $f(x,y) = \log\left(\sqrt{x}\right)\sin(2y)$

(2 + 2 + 2 Punkte)

5. Es sei $M \subset \mathbb{R}^2$ mit

$$M := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -\sqrt{y} \leq x \leq \sqrt{y}, 0 \leq y \leq \sin\left(\tfrac{1}{2}\pi x\right)\right\}.$$

   Bestimme $|M|$.
   Hinweis: Es darf verwendet werden, dass $x^2 = \sin\left(\frac{1}{2}\pi x\right)$ für genau zwei $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.