Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
17.06.2014
Blatt 8

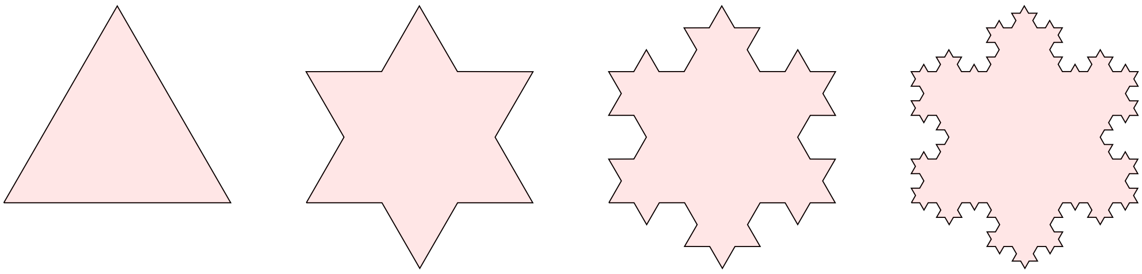
Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 24.06.2014, 10:00h vor H45.2)

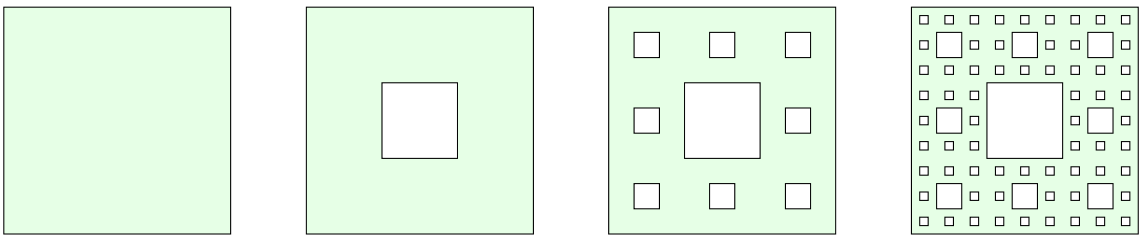
1. Die Menge A_0 sei ein gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge $a_0 = 1$. Die Menge A_{n+1} entsteht aus A_n, indem mittig an jeder Kante ein gleichseitiges Dreieck der Kantenlänge $a_{n+1} := \frac{a_n}{3}$ hinzugefügt wird.

   Die Menge B_0 sei ein Quadrat mit Kantenlänge 1. Dieses Quadrat wird in 9 kleinere Quadrate unterteilt und das mittlere entfernt, das ergibt B_1. B_{n+1} entsteht aus B_n, indem dieser Schritt für jedes der kleineren Quadrate wiederholt wird (siehe Skizze).

   Skizze:



A_0 A_1 A_2 A_3



B_0 B_1 B_2 B_3

   Berechne die Flächen von $A := \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$ und $B := \bigcap_{n=0}^{\infty} B_n$.

   Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass die Fläche eines gleichseitigen Dreiecks mit Kantenlänge b gerade $\frac{1}{4}\sqrt{3}b^2$ ist.

(3 + 3 Punkte)

2. (a) Es sei $M := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1, y \geq 0 \right\}$ und $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x,y) := x^2y - y^3x$. Bestimme $\int_M f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$mit dem Prinzip von Cavalieri wie in Satz 2.2.

   (b) Gegeben ist die Ellipse $E := \left\{ \binom{x}{y} \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + \frac{1}{4}y^2 \leq 1 \right\}$. Rotiert man E um die x-Achse, erhält man den Rotationsellipsoid E_x. Rotiert man E um die y-Achse, erhält man den Rotationsellipsoid E_y. Bestimme das Volumen von E_x und E_y mit dem Prinzip von Cavalieri wie in Satz 2.2.

(2 + 4 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

3. Es seien $a, b, c > 0$. Berechne das Volumen des Ellipsoids E mit

$$E := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Hinweis: Eventuell ist die Koordinatentransformation

$$x = ar\cos(\varphi)\cos(\theta) \quad y = br\sin(\varphi)\cos(\theta) \quad z = cr\sin(\theta)$$

hilfreich.

(3 Punkte)

4. Es seien $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ und $\sigma \neq 0$. Berechne

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k \, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x$$

für $k = 0$, $k = 1$ und $k = 2$.

(2 + 2 + 3 Punkte)

5. Berechne

$$\int_M (2x + 3y)^2 - \frac{1}{4y - x} \, \mathrm{d}(x, y)$$

wobei M ein Parallelogramm mit den Ecken $\left(\frac{-3}{11}, \frac{2}{11}\right)$, $\left(\frac{-7}{11}, \frac{1}{11}\right)$, $\left(\frac{-9}{11}, \frac{6}{11}\right)$ und $\left(\frac{-13}{11}, \frac{5}{11}\right)$ ist. Verwende eine Transformation, so dass die Integration über ein Rechteck durchgeführt wird.

(3 Punkte)

6. Bonusaufgabe: Beim Finalspiel eines großen Fußballturniers kommt es zum Elfmeterschießen. Du musst zum alles entscheidenden fünften Schuss antreten. Da der vorherige Schuss leider vorbei ging, möchtest Du den Ball auf dem Elfmeterpunkt nun in eine günstigere Lage bringen. Zeige, dass es immer zwei Punkte auf der Oberfläche des Balls gibt, die (relativ zum Tor) in exakt derselben Position zu liegen kommen, wie beim vorherigen Schuss, egal wie Du den Ball auch drehst und wendest. Kurz: Es ist unmöglich, den Ball komplett anders auf dem Elfmeterpunkt abzulegen.

   Hinweis: Wir gehen von einem idealen Ball aus, der keine Nähte oder ein Ventil aufweist und perfekt rund ist. Außerdem ist der Elfmeterpunkt tatsächlich ein einzelner Punkt im mathematischen Sinn.

(3 Bonuspunkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.