Dr. H. Lanzinger
M. Harder

Sommer 2014
24.06.2014
Blatt 9

Übungen zu Höhere Mathematik II

(Abgabe am Dienstag, den 01.07.2014, 10:00h vor H45.2)

1. Gib für jede der folgenden Mengen $M_i \subset \mathbb{R}^2$ an, ob sie offen, abgeschlossen oder kompakt ist. Gib zusätzlich jeweils die Menge aller inneren Punkte, die Menge aller Randpunkte und die abgeschlossene Hülle an.

   (a) $M_1 := \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid -x \le y \le x\right\}$

   (b) $M_2 := \left\{(x,y)^\top \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 4\right\} \cap M_1$

   (c) $M_3 := \left\{ f(x) \cdot \begin{pmatrix} \sin(y) \\ \cos(y) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; f(x) = \tan\left(\frac{\pi}{2}\left(x - x\mathbb{1}_{\{-1,1\}}(x)\right)\right), x \in [-1,1], y \in [-\pi,\pi] \right\}$

   (2 + 2 + 2 Punkte)

2. Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $M \subset \mathbb{R}^n$. Für $i \in \mathbb{N}$ seien $O_i \subset \mathbb{R}^n$ offen.

   (a) Sei $B := M^c$. Zeige, dass $\left(\overline{M}\right)^c = \mathring{B}$ gilt.

   (b) Zeige oder widerlege: $\overline{\mathring{M}} = \mathring{\overline{M}}$.

   (c) Zeige, dass $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} O_i$ und $\bigcap_{i=1}^{n} O_i$ offen sind.

   (d) Zeige, dass im Allgemeinen $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} O_i$ nicht offen ist.

   (e) Sei $x_0 \in M$. Zeige, dass x_0 genau dann ein Häufungspunkt von M ist, wenn eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset M \setminus \{x_0\}$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ existiert.

   (2 + 2 + 2 + 2 + 2 Punkte)

3. Zeige, dass die Umkehrung von Proposition 3.1 im Allgemeinen nicht gilt. Seien also $n, p \in \mathbb{N}$ und sei $M \subset \mathbb{R}^n$, sowie $f : M \to \mathbb{R}^p$ stetig.

   (a) Zeige, dass aus gleichmäßiger Stetigkeit von f noch nicht folgt, dass M kompakt ist.

   (b) Zeige, dass aus der Kompaktheit von $f(M)$ noch nicht folgt, dass M kompakt ist.

   (c) Sei $p = 1$. Zeige, dass aus der Existenz von $\min_{x \in M} f(x)$ und $\max_{x \in M} f(x)$ noch nicht folgt, dass M kompakt ist.

   (1 + 1 + 1 Punkte)

Weitere Aufgaben befinden sich auf der nächsten Seite.

4. Gegeben ist die Abbildung $f\colon [0,1]^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y = 0, \\ \frac{x-y}{(x+y)^3} & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) Bestimme $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

(b) Bestimme $\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

(c) Widersprechen die Ergebnisse der Teilaufgaben (a) und (b) Proposition 3.3 aus der Vorlesung?

(2 + 2 + 2 Punkte)

Die Lösung kann in Gruppen erarbeitet, soll aber einzeln aufgeschrieben und abgegeben werden. Bitte jeweils Vorname, Nachname und SLC-Login gut lesbar auf das Blatt schreiben.